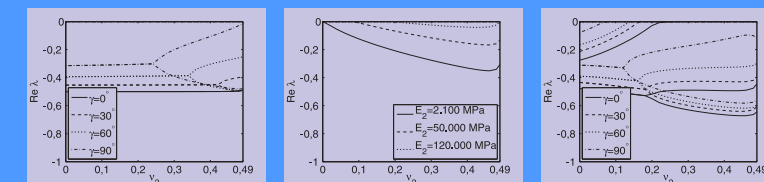
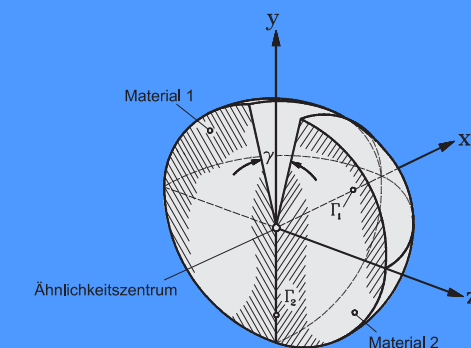


In hochbeanspruchten Strukturen sind zunehmend Verbundwerkstoffe im Einsatz. In solchen Strukturen können an verschiedenen Stellen Multimaterialkonfigurationen mit materiellen und geometrischen Diskontinuitäten vorliegen. Es stellt sich die Frage, wie diese bruchmechanisch bewertet werden können. Ein Parameter, der hierzu herangezogen werden kann, ist die Spannungssingularitätsordnung. In dieser Arbeit werden mithilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen in unterschiedlichen linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit materiellen und geometrischen Diskontinuitäten durchgeführt. Die Methode erweist sich hierbei als effizientes Werkzeug. Im Rahmen der Analysen wird deutlich, dass bei dreidimensionalen Konfigurationen ein komplexes Geschehen vorliegt. Bemerkenswert ist, dass bei einigen Multimaterialkonfigurationen stärkere Singularitäten als die bekannte Rissspitzensingularität auftreten. Für piezoelektrische Strukturen ergeben sich allgemein zusätzliche und stärkere Singularitätsordnungen als für rein linear-elastische Situationen.



Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode

Wibke Mayland



Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Wibke Mayland

aus Seeheim

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. W. Becker
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann
Tag der Einreichung:	24.4.2012
Tag der mündlichen Prüfung:	25.6.2012

Darmstadt 2012

D17

Mayland, Wibke

**Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen
in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen
mit der Rand-Finite-Elemente-Methode**

Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt
Band 25

Herausgeber:

Studienbereich Mechanik
Technische Universität Darmstadt
Hochschulstr. 1
D-64289 Darmstadt
Germany

© 2012 Wibke Mayland
Herdweg 57
D-64285 Darmstadt
Germany

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu vervielfältigen.

ISBN 978-3-935868-25-9

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin im Fachgebiet Strukturmechanik an der TU Darmstadt entstanden.

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, allen voran Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Becker für die hervorragende Betreuung, die stete Diskussionsbereitschaft und die wohlwollende Unterstützung in allen Phasen der Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann danke ich für die bereitwillige Übernahme des Korreferats und das damit verbundene Interesse an meiner Arbeit.

Bei allen aktuellen und ehemaligen Mitgliedern der Fachgebiete Strukturmechanik und Festkörpermechanik bedanke ich mich für die angenehme Arbeitsatmosphäre innerhalb und außerhalb der Kernzeit.

Schließlich wäre diese Arbeit nicht ohne die Unterstützung und Ermutigung von meiner Familie und meinen Freunden entstanden, bei denen ich mich daher an dieser Stelle auch ganz herzlich bedanken möchte.

Darmstadt, im August 2012

Wibke Mayland

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	iii
Kurzfassung	vii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit	8
2 Theoretische Grundlagen	11
2.1 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	11
2.2 Piezoelektrisches Materialverhalten	14
2.3 Spannungssingularitäten in der linear-elastischen Bruchmechanik	15
2.4 Rand-Finite-Elemente-Methode für piezoelektrische Probleme	18
3 Analyse von zwei- und dreidimensionalen linear-elastischen Konfigurationen	23
3.1 Implementierung und Verifikation der Rand-Finite-Elemente-Methode . .	23
3.2 Modelle für homogene Konfigurationen	25
3.2.1 Zweidimensionaler Riss- und Kerbgrund	25
3.2.2 Dreidimensionale Interaktion von vier Kerben	28
3.3 Modelle für Multimaterialkonfigurationen	33
3.3.1 Interfacekerb am freien Rand	33
3.3.2 Zwei gerade Interfaces unter variablem Interaktionswinkel am freien Rand	51
3.4 Fazit	58

4	Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen in Bezug auf Material-	61
	daten und Geometrie	
4.1	Allgemeines Vorgehen bei der Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen	62
4.2	Zweidimensionaler Trimaterialkerb	64
4.3	Zweidimensionaler Viermaterialkerb	70
4.4	Dreidimensionale Konfigurationen	74
4.5	Fazit	79
5	Analyse von zwei- und dreidimensionalen piezoelektrischen Konfigura-	81
	tionen	
5.1	Modellbildung für piezoelektrische Materialien	81
5.2	Laminatecke am freien Rand	82
5.3	Dreidimensionale Interaktion von vier Kerben	90
5.4	Interfacekerb am freien Rand	93
5.5	Fazit	101
6	Zusammenfassung und Ausblick	103
	Literaturverzeichnis	107

Nomenklatur

Abkürzungen und Eigennamen

Abaqus	kommerzielle FEM-Software [23]
BTO	Barium-Titanat
Caesar	Rand-Finite-Elemente-Code des Fachgebiets Strukturmechanik, TU Darmstadt
CFK	Carbon-faserverstärkter Kunststoff
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
Isight	kommerzielle Optimierungssoftware [24]
MATLAB	kommerzielle Mathematiksoftware [64]
PZT	Blei-Zirkonat-Titanat
PZT-5A	Blei-Zirkonat-Titanat-Werkstoff
RFEM	Rand-Finite-Elemente-Methode
T300/Epoxy	mit T300-Fasern verstärkter Epoxidharz-Werkstoff

Schreibweisen und Indizes

$()_i$	Index 1, 2, 3 (1, 2, ..., 6 bei Voigt-Notation)
$()_{ij}$	Indizes jeweils 1, 2, 3
$()_{ijkl}$	Indizes jeweils 1, 2, 3
$()_{,i}$ bzw. $()_{,\xi}$	erste partielle Ableitung nach Komponente i bzw. nach ξ
$()_{,ii}$ bzw. $()_{,\xi\xi}$	zweite partielle Ableitung nach Komponente i bzw. nach ξ
$()^T$	Transponierte Matrix oder transponierter Tensor
$\text{Re}(\dots)$	Realteil einer komplexen Zahl
$\text{Im}(\dots)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$ \dots $	Determinante

Lateinische Buchstaben

\mathbf{B}_1	Verschiebungs-Verzerrungs-Operator-Matrix in der RFEM
\mathbf{B}_2	Verschiebungs-Verzerrungs-Operator-Matrix in der RFEM
\mathbf{C}	Steifigkeitsmatrix
C_{ij}	Komponenten der Steifigkeitsmatrix
\mathbf{c}	Elastizitätstensor vierter Stufe

c_{ijkl}	Komponenten des Elastizitätstensors vierter Stufe
\mathbf{D}	dielektrische Verschiebung (Flußdichte)
D_i	Komponenten der dielektrischen Verschiebung
\mathbf{E}	elektrische Feldstärke
$\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$	Systemsteifigkeitsmatrizen in der RFEM
E	Elastizitätsmodul
E_i	Komponenten der elektrischen Feldstärke, Elastizitätsmodul von Sektor i bei Multimaterialkonfigurationen, Elastizitätsmodul in Richtung i bei orthotropen Werkstoffen
\mathbf{e}	piezoelektrische Matrix
\mathbf{f}	Volumenkraft
G_{ij}	Schubmodule eines orthotropen Werkstoffs
f_i	Komponenten der Volumenkraft
f_{ijm}	Winkelvariationsfunktion der Spannungen
g_{im}	Winkelvariationsfunktion der Verschiebungen
\mathbf{H}	Hilfsmatrix in der RFEM
\mathbf{h}	Ansatzfunktionen in der RFEM
\mathbf{J}	Jacobi-Matrix
K_m	generalisierte Spannungsintensitätsfaktoren
\mathbf{L}	Linearer Operator in der RFEM
$\mathbf{L}_\zeta, \mathbf{L}_\eta, \mathbf{L}_\xi$	Hilfsmatrizen in der RFEM
\mathbf{n}	Richtungsvektor in Skalierungsrichtung in der RFEM
$P(r, \varphi_1, \varphi_2)$	Punkt in sphärischem Koordinatensystem
Q	Oberflächenladung
q	Raumladung
r, φ	Polarkoordinaten
r, φ_1, φ_2	sphärische Koordinaten
S	Ähnlichkeitszentrum (Similarity Center) in der RFEM
\mathbf{t}	Spannungsvektor
t_i	Komponenten des Spannungsvektors
U	Formänderungsenergiedichte
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
u_i	Komponenten des Verschiebungsvektors
V	Volumen
∂V	Oberfläche eines Kontinuums mit Volumen V
W_F	Formänderungsenergie
$\mathbf{w}_h(\xi)$	analytische Knotenverschiebungsfunktionen in der RFEM

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	Vektor der Knotenkoordinaten (jeweils x-, y- oder z-Komponente) in der RFEM
x, y, z	kartesische Koordinaten
x_0, y_0, z_0	kartesische Koordinaten des Ähnlichkeitszentrums S in der RFEM
x_S, y_S, z_S	kartesische Koordinaten des Randes bezogen auf das Ähnlichkeitszentrum S in der RFEM

Griechische Buchstaben

α, β	Winkel (Sektorenwinkel in Multimaterialkonfigurationen)
γ	Winkel (Kerböffnungswinkel, Interfacewinkel, ...)
γ_{xy}	technische Gleitung
Γ	Rand des Gebiets Ω
Γ_1, Γ_2	Diskontinuitätslinien (Kerbgrund, Interface am Rand, ...)
Δx	Schrittgröße bei der Variation von Parameter x
$\delta, \delta_1 - \delta_4$	Winkel (Sektorenwinkel in Multimaterialkonfigurationen)
ϵ	Matrix der dielektrischen Materialkonstanten
ϵ_{ij}	dielektrische Materialkonstanten
ε	linearisierter Verzerrungstensor
ε_{ij}	Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors
ε_i	Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors in Voigt-Notation
ζ, η	RFEM-Koordinaten entlang des Randes Γ
ϑ	Lagenwinkel einer Laminatschicht
λ	Singularitätsexponent bzw. Singularitätsordnung, auch λ_m
λ_k	modaler Skalierungsfaktor in radialer Richtung in der RFEM
ν	Querkontraktionszahl
ν_k	Querkontraktionszahl von Material k
ν_{ij}	Querkontraktionszahlen eines orthotropen Werkstoffs
ξ	normierte RFEM-Koordinate in Skalierungsrichtung
σ	Cauchy'scher Spannungstensor
σ_{ij}	Komponenten des Cauchy'schen Spannungstensors
σ_i	Komponenten des Cauchy'schen Spannungstensors in Voigt-Notation
τ_{xy}	Schubspannungskomponenten des Cauchy'schen Spannungstensors

Φ_k	Vektor der Verschiebungsmoden in der RFEM
φ	elektrisches Potential; auch Polarkoordinate (siehe r)
φ_1, φ_2	sphärische Koordinaten (siehe r)
Ω	Gebiet

Kurzfassung

In hochbeanspruchten Tragwerken und Bauteilen sind heute zunehmend Verbundwerkstoffe im Einsatz. Es stellt sich die Frage, wie Multimaterialstrukturen bruchmechanisch bewertet werden können. Während bei homogenen isotropen Bauteilen hinreichend bekannt ist, wo potenzielle Schwachstellen auftreten können, besteht insbesondere für dreidimensionale und piezoelektrische Strukturen noch Forschungsbedarf. Ein Parameter, der zur bruchmechanischen Bewertung herangezogen werden kann, ist die Spannungssingularitätsordnung. Diese ist eine rein theoretische Größe innerhalb der linearen Elastizitätstheorie, hat sich jedoch als guter Indikator für potentielle Schwachstellen in Strukturen erwiesen. Für einige ebene Konfigurationen aus isotropen Materialien ist sie bekannt, für dreidimensionale Multimaterialkonfigurationen mit linear-elastischen und piezoelektrischen Materialien existieren jedoch nur wenige bekannte Lösungen. Da die Herleitung einer geschlossen-analytischen Lösung allgemein nicht möglich ist, sind effiziente numerische Verfahren gefragt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die semi-analytische Rand-Finite-Elemente-Methode (RFEM) eingesetzt. Diese besitzt den Vorteil, dass Singularitätsexponenten innerhalb der Analyse direkt und mit vergleichsweise geringem Aufwand berechnet werden. Zudem ist sie für beliebiges anisotropes linear-elastisches Materialverhalten einsetzbar.

In dieser Arbeit wird untersucht, wie Spannungssingularitätsordnungen in zwei- und dreidimensionalen Multimaterialkonfigurationen mit geometrischen und materiellen Diskontinuitäten mithilfe der RFEM ermittelt werden können. Für rein linear-elastisches Materialverhalten werden hierbei zum einen für Konfigurationen, in denen Singularitätsordnungen unbekannt sind, durch geeignete Modellbildung Singularitätsordnungen zur Verfügung gestellt. Zum anderen werden Konfigurationen betrachtet, bei denen mehrere zweidimensionale linienartige geometrische oder materielle Diskontinuitäten aufeinandertreffen. Da für zweidimensionale Diskontinuitäten häufiger Ergebnisse bekannt sind oder deren analytische oder numerische Ermittlung mit geringerem Aufwand durchführbar sind als für echt dreidimensionale Konfigurationen, wird untersucht, ob es Zusammenhänge in Form einfacher Bildungsgesetze an solchen Stellen gibt. Es wird jedoch festgestellt, dass das Geschehen an den dreidimensionalen Interaktionspunkten allgemein recht komplex ist und eine echte dreidimensionale Analyse für die meisten Konfigurationen nötig ist. Die RFEM erweist sich hierbei als effizientes Werkzeug.

Ein weiterer Teil der Arbeit widmet sich der gezielten Ermittlung von starken Singularitäten durch Variation von geometrischen Größen und Materialparametern. Die untersuchten Beispiele zeigen hier zum einen, dass auch in sehr einfach erscheinenden Kon-

figurationen sehr starke Singularitätsordnungen auftreten können. Dabei führt neben Rissen vor allem die Kombination sehr unterschiedlicher Materialeigenschaften zu starken Singularitätsordnungen. Zum anderen wird deutlich, dass Singularitätsordnungen bei Multimaterialkonfigurationen mit geometrischen Diskontinuitäten nicht immer anschaulich vorhergesagt werden können, sondern dass teilweise überraschende Ergebnisse auftreten können. Daher ist eine eingehende Analyse mit einer zuverlässigen Methode zur bruchmechanischen Bewertung einer solchen Konfiguration immer empfehlenswert.

Schließlich werden piezoelektrische Konfigurationen untersucht. Es kann gezeigt werden, dass sich die RFEM auch für dieses Materialverhalten gut zur Ermittlung von Spannungssingularitätsordnungen eignet, was ein klarer Vorteil der Methode ist. Im Vergleich mit rein linear-elastischen Konfigurationen treten jeweils zusätzliche und allgemein stärkere Singularitätsordnungen auf. Bei der Verwendung von piezoelektrischen Materialien in Strukturen muss also auch bei gleichbleibenden mechanischen Eigenschaften mit stärkeren Singularitätsordnungen gerechnet werden als bei rein linear-elastischem Materialverhalten.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Hochbeanspruchte mechanische Tragwerke und Bauteile bestehen heutzutage in vielen Branchen zunehmend aus modernen Verbundwerkstoffen. Aufgrund von günstigen Materialeigenschaften wie hoher spezifischer Steifigkeit und geringem Gewicht können mit solchen Materialien sehr leistungsfähige Strukturen realisiert werden. Piezoelektrische Materialien gewinnen ebenso zunehmend an Bedeutung, da sie sich sowohl als Aktor als auch als Sensor beispielsweise für die Überwachung der Integrität einer Struktur anbieten.

Für Multimaterialstrukturen aus linear-elastischen und piezoelektrischen Materialien stellt sich die Frage, wie diese bruchmechanisch bewertet werden können. Bei homogenen isotropen Bauteilen ist hinreichend bekannt, wo potenzielle Schwachstellen auftreten können und wie diese aufzuspüren sind. Aus einfachen Konfigurationen wie einem zweidimensionalen Bimaterialkerb ist jedoch erkennbar, dass sich das Verhalten einer Multimaterialstruktur mit geometrischen und materiellen Diskontinuitäten grundlegend von isotropen homogenen Strukturen unterscheiden kann. Insbesondere können hier so genannte Hypersingularitäten auftreten – also stärkere Singularitäten als die bekannte Rissspitzensingularität, die selbst bei einem Bimaterialkerb bereits beobachtet werden können – wohingegen in homogenen Strukturen üblicherweise die Rissspitzensingularität als „worst case“ auftritt und bekannt ist. Daher ist es sehr wichtig, Multimaterialstrukturen immer gründlich in Bezug auf ihre Festigkeit zu untersuchen.

Dies kann zum Teil durch experimentelle Untersuchungen erfolgen. Da diese jedoch oft sehr kostspielig sind und sich einzelne Parameter nur mit gewissem Aufwand variieren lassen, ist eine bruchmechanische Bewertung vorteilhaft. Ein Parameter, der hierfür – neben beispielsweise dem Spannungskonzentrationsfaktor und der Energiefreisetzungsrate – herangezogen werden kann, ist die Spannungssingularitätsordnung. Diese ist eine rein theoretische Größe innerhalb der linearen Elastizitätstheorie, hat sich jedoch als guter Indikator für potentielle Schwachstellen in Strukturen erwiesen. Die Spannungssingularitätsordnung ist insbesondere für einige ebene Konfigurationen aus isotropen Materialien bekannt, für dreidimensionale Multimaterialkonfigurationen mit linear-elastischen und mit piezoelektrischen Materialien sind jedoch oft keine Werte in der Literatur auffindbar. Um Multimaterialstrukturen in der Praxis möglichst umfassend bewerten zu können ist es daher von Interesse, Singularitätsordnungen für möglichst viele strukturelle Situationen zur Verfügung zu stellen.

Spannungssingularitätsordnungen können sowohl analytisch als auch numerisch ermittelt werden. Geschlossen-analytische Lösungen sind natürlich erstrebenswert, da sie exakt sind und sich leicht Parameterstudien durchführen lassen, jedoch sind solche Lösungen bereits für zweidimensionale Konfigurationen mit linear-elastischen Materialien aufwendig herzuleiten. Auch sind einzelne Lösungen in der Literatur oft in Bezug auf das Materialverhalten eingeschränkt nutzbar. Insbesondere wenn viele leicht verschiedene Konfigurationen überprüft werden sollen ist die Herleitung einer analytischen Lösung deutlich zu aufwendig.

Zur numerischen Ermittlung von Spannungssingularitätsordnungen können verschiedene Methoden eingesetzt werden, jedoch sind gängige Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode nur mit Einschränkungen und Nachteilen verwendbar. So muss eine Konfiguration sehr fein vernetzt werden um eine vorliegende Singularität überhaupt zu erfassen. Die Singularitätsordnung selbst muss aus den Ergebnissen einer Finite-Elemente-Analyse mit weiteren Rechenschritten erst extrahiert werden. Dies macht eine umfangreiche Analyse der Singularitätsordnungen unter Variation eines Parameter wie eines Winkels oder eines Elastizitätsmoduls zu einer sehr aufwendigen Angelegenheit.

Die Rand-Finite-Elemente-Methode (RFEM), die in der vorliegenden Arbeit zur Untersuchung verwendet wird, ist für die Ermittlung von Spannungssingularitätsordnungen von Vorteil, da die Singularitätsexponenten innerhalb der Analyse direkt berechnet werden und sie für beliebiges anisotropes linear-elastisches Materialverhalten einsetzbar ist. Die RFEM ist eine semi-analytischen Methode, die lediglich die Vernetzung des Randes einer Konfiguration erfordert. Sie liefert die Spannungssingularitätsordnungen eines Punktes bei entsprechender Wahl eines innerhalb der Methode definierten Ähnlichkeitszentrums mit hoher Genauigkeit bei relativ geringem Aufwand.

1.2 Stand der Forschung

In diesem Abschnitt wird der Stand der Forschung anhand der wichtigsten verfügbaren Referenzen dargestellt. Da es zu allen relevanten Themengebieten eine Vielzahl an Publikationen gibt, soll die erwähnte Literatur nur einen Auszug zur besseren Einordnung der Fragestellung dieser Arbeit liefern und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Spannungssingularitäten in linear-elastischen Konfigurationen

Spannungssingularitäten und die dazugehörigen Singularitätsordnungen treten im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie auf. In diesem Abschnitt soll ein Überblick über

bereits in der Literatur bekannte Spannungssingularitätsordnungen in zwei- und dreidimensionalen linear-elastischen Konfigurationen sowie über verwendete Methoden zur Untersuchung von Spannungssingularitäten gegeben werden. Für die genaue Definition und Bedeutung der Spannungssingularitätsordnungen sei auf Abschnitt 2.3 verwiesen.

Die wohl bekannteste Konfiguration, bei der eine Spannungssingularität auftritt, ist die eines Risses in homogenem linear-elastischem Material. Diese wurde bereits 1907 von Wieghardt [100] untersucht. Williams [103] untersuchte einen Riss im Interface zweier isotroper Materialien.

Die Situation eines zweidimensionalen ebenen unendlich ausgedehnten Keils wurde in einer Pionierarbeit ebenso von Williams [102] sowie später beispielsweise von Bogy [14] und Gu und Belytschko [47] untersucht, eine allgemeine zweidimensionale Multimaterialkonfiguration mit verschiedenen winkelförmigen Segmenten aus rein isotropen Materialien (ein sogenannter „multi-material wedge“ oder „junction“) wurde für verschiedene Randbedingungen beispielsweise von Zak und Williams [113], Bogy [13, 15], Bogy und Wang [16], Hein und Erdogan [48], Theocaris [97], Chen und Nisitani [21] und Munz und Yang [71] untersucht. England [38] untersuchte den Einfluss der lokalen Geometrie und der Art der Randbedingungen auf die Spannungssingularitäten für verschiedene zweidimensionale linear-elastische Probleme. Pageau u. a. [75] betrachten die Abhängigkeit der Singularitätsordnung von Geometrie und Materialdaten an einem Knotenpunkt dreier Sektoren und erörtern, welche Material- und Winkelkombinationen für diese Konfiguration bezüglich auftretender Singularitätsordnungen für Anwender vorteilhaft sind. Dempsey und Sinclair [31, 32] und Dempsey [30] untersuchen speziell das Auftreten von logarithmischen Spannungssingularitäten in solchen Konfigurationen. Picu und Gupta [76] legen das Augenmerk auf die Abhängigkeit der Spannungssingularitäten von den Winkeln der einzelnen Sektoren und zeigen Konfigurationen mit starken Singularitäten („supersingularities“) auf. Carpinteri und Paggi [18, 19] untersuchen den Einfluss von Rissen innerhalb eines einzelnen Materialsektors.

Einen Überblick über Untersuchungen zu Multimaterialkerben sowie weiteren zweidimensionalen linear-elastischen Konfigurationen mit gebietsweise isotropen Materialien, die bereits in der Literatur untersucht wurden, liefert Sinclair [84, 85]. Auch einfache dreidimensionale Konfigurationen wie eine Fichera-Ecke werden hier aufgeführt. Einen Überblick über bekannte zweidimensionale Konfigurationen liefern auch Carpinteri und Paggi [20].

Eine Multimaterialecke mit rein anisotropen Materialien haben beispielsweise Delale [29], Pageau und Biggers Jr [73, 74], Ting [98] und Chen [22] untersucht. Arbeiten, in denen sowohl isotropes als auch anisotropes Materialverhalten berücksichtigt wird, sind bei-

spielsweise Sinclair [83], Desmorat und Leckie [33], Barroso u. a. [5], Lin und Sung [58], Poonsawat u. a. [78, 79].

Teilaspekte des ebenen Multimaterialkerb-Problems aus rein linear-elastischen gebietsweise isotropen Materialien sind auch heute noch Gegenstand der Forschung. So untersuchen Mishuris und Kuhn [68] einen Riss im Interface zwischen zwei elastischen Materialien im Hinblick auf die Modellierung des Interfaces, da dort entgegen häufiger Annahme nicht immer idealer Kontakt vorliegt, und Linkov und Rybarska-Rusinek [62] betrachten speziell numerische Aspekte für den Fall eines dünnen Keils, dessen Sektorwinkel gegen Null geht ebenso wie stark inhomogene Materialeigenschaften bei mehreren Sektoren.

Die gezielte Aufspürung von optimalen Konfigurationen, also etwa die Minimierung von auftretenden Singularitätsordnungen abhängig von geometrischen Parametern oder Materialdaten, ist beispielsweise Gegenstand der Arbeiten von Pageau u. a. [75] und Carpinteri und Paggi [18].

Ein dreidimensionaler Oberflächenriss wird beispielsweise von Bažant und Estenssoro [4] numerisch untersucht. Eine analytische Lösung für einen Mode I-Riss orthogonal zur Oberfläche gibt Benthem [9] an. In einer früheren Arbeit untersuchen Kassir und Sih [52] das dreidimensionale Spannungsfeld für eine elliptische Rissfläche analytisch.

Eine dreidimensionale Laminecke und dort auftretende Spannungssingularitäten werden beispielsweise für homogenes Material und für verschiedene Eckgeometrien von Bažant [3], Benthem [9] und Ghahremani [41] untersucht. Eine Bimaterialecke betrachten unter anderem Somaratna und Ting [86], Barsoum [6], Ghahremani [41], Ghahremani und Shih [42], Picu und Gupta [77], Koguchi u. a. [53] und Glushkov u. a. [43]. Dimitrov u. a. [35] untersuchen eine Laminecke für anisotropes Materialverhalten und berechnen die Singularitätsordnungen und -moden für verschiedene Eckenwinkel und Faserorientierungen für Kreuz- und Winkelverbunde. Der Untersuchung der Singularitäten an dreidimensionalen Ecken widmet sich auch die Arbeit von Leguillon [56], der anmerkt, dass für allgemeine dreidimensionale Situationen Singularitätsordnungen und zugehörige Moden nur durch numerische Berechnungen ermittelt werden können und die genaue Ermittlung dieser für die bruchmechanische Bewertung fundamental ist.

Der Ermittlung von Spannungssingularitäten in anisotropen Composites mit der Finite-Elemente-Methode ist die Arbeit von Somaratna und Ting [86] gewidmet. Die Autoren merken hierbei an, dass die Herleitung von analytischen Lösungen für echt dreidimensionale Konfigurationen schwierig ist und es überwiegend analytische Lösungen für Konfigurationen gibt die sich auf zweidimensionale Situationen reduzieren lassen.

Die Suche nach besonders starken Singularitäten ist Gegenstand der Arbeit von Leguillon und Sanchez-Palencia [57]. Jedoch traten für Situationen, bei denen die Autoren starke Singularitäten vermuteten, wie beispielsweise eine Rissfront an einem freien Rand und ein Zweischicht-Laminat mit einem Riss, keine besonders starken Werte auf.

Allgemein gibt es für dreidimensionale Konfigurationen insbesondere für einige spezielle Konfigurationen wie den Oberflächenriss oder eine Laminatcke durchaus einige Arbeiten, bei denen auch die Spannungssingularitätsordnungen ermittelt werden. Jedoch sind auch noch sehr viele dreidimensionale Multimaterialkonfigurationen im Hinblick auf Spannungssingularitäten und ihre Ordnungen sehr wenig erforscht. Situationen, bei denen besonders starke Singularitätsordnungen – insbesondere im Bereich -1 bis $-1,5$ – vorliegen, liegen nach Sichtung der Literatur bislang nicht vor.

Zur Untersuchung von Spannungssingularitäten in zweidimensionalen Konfigurationen sowie in dreidimensionalen Situationen, die sich auf zweidimensionale Konfigurationen zurückführen lassen (also beispielsweise axialsymmetrische Körper), finden überwiegend analytische Ansätze ihre Anwendung. Hierbei werden hauptsächlich drei Methoden eingesetzt. Die Eigenfunktion-Expansions-Methode wird bereits von Wieghardt [100] und später von Williams [102] verwendet, in einer neueren Arbeit untersuchen Carpinteri und Paggi [18] damit beispielsweise einen Trimaterialkerb. Eine Mellin-Transformation verwenden unter anderem Bogy und Wang [16] und Hein und Erdogan [48]. Mit der Methode der komplexen Potentiale arbeiten zum Beispiel Theocaris [97], Chen und Nisitani [21] und Pageau u. a. [75]. Zum Teil bilden diese Ansätze jedoch nicht alle Arten von Singularitäten ab und treffen einschränkende Annahmen über die Art der Singularitätsordnung, wie Sator [80] in seiner Arbeit anmerkt.

Diese Methoden sind jedoch meist nur für bestimmte Materialverhalten, beispielsweise nur für isotrope Materialien, einsetzbar und wie zum Beispiel die komplexe Methode für allgemeine dreidimensionale Konfigurationen nicht verwendbar. Daher werden dort überwiegend numerische Untersuchungen durchgeführt, hauptsächlich mit der Finite-Elemente-Methode und mit der Rand-Elemente-Methode. Zur Ermittlung von Spannungssingularitäten mit der Finite-Elemente-Methode lassen sich hierbei verschiedene Ansätze beobachten. So werden teilweise spezielle Elemente benutzt, die das singuläre Verhalten mit abbilden oder teilweise werden Methoden zur lokalen Degradation des Gitters verwendet. Bei der Analyse mit der Finite-Elemente-Methode ist es wichtig, sicherzustellen, dass Singularitäten überhaupt erfasst werden. Auch müssen die Singularitätsordnungen bei einer Finite-Elemente-Analyse erst wieder aus den Ergebnissen extrahiert werden und sind nicht direkt ablesbar. Finite-Elemente-Analysen werden in einer Vielzahl von Publikationen verwendet, unter anderem von Bazant und Estenssoro [4],

Somaratna und Ting [86] und Dimitrov u. a. [35].

Die Rand-Finite-Elemente-Methode wurde beispielsweise von Mittelstedt und Becker [70] zur Untersuchung von Spannungssingularitäten in einigen linear-elastischen Konfigurationen eingesetzt. Vergleiche mit Referenzwerten aus analytischen Rechnungen und Finite-Elemente-Analysen zeigten hierbei, dass die Rand-Finite-Elemente-Methode zur Ermittlung von Spannungssingularitäten gut geeignet ist. Im Vergleich mit anderen Methoden zeigte sich der Vorteil in der Anwendung für beliebiges anisotropes linear-elastisches Materialverhalten und in der direkten Ausgabe der Singularitätsordnung im Rahmen der Analysen.

Rand-Finite-Elemente-Methode

Die Rand-Finite-Elemente-Methode wurde ursprünglich im Rahmen der Bodenmechanik entwickelt. Eine Herleitung der Methode in diesem Kontext unter dem Synonym „Consistent Infinitesimal Finite-Element Cell Method“ legen Wolf und Song [108] für halbbeschränkte Konfigurationen dar. Die Herleitung für unbeschränkte und beschränkte Gebiete und das Lösungsverfahren finden sich in den Arbeiten Wolf und Song [110, 111] und Wolf [105]. Eine alternative Herleitung der Methode mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zeigen Deeks und Wolf [28] auf.

Das Aufbringen von Lasten innerhalb der Methode wird in den Arbeiten von Song und Wolf [90], Doherty und Deeks [36, 37] und Deeks [26] beschrieben. Weiterentwicklungen und Anwendungen der Methode im Bereich der Elastomechanik sind beispielsweise in Song und Wolf [89] und Song [87] dargelegt. Weiterhin gibt es Arbeiten im Bereich Dynamik (Wolf und Song [106, 107, 109]), Geomechanik (Wolf [104]), Diffusion (Song und Wolf [91]) und Strömungsmechanik (Deeks und Cheng [27]).

Eine Erweiterung der Methode für piezoelektrisches Materialverhalten wird zuerst in Artel und Becker [2] dargelegt, eine ausführliche Darstellung der Herleitung und Lösung der Gleichungssysteme findet sich in Artel [1]. Zur statischen Analyse von dünnen Platten wurde die Methode von Dieringer u. a. [34] erweitert.

Die Anwendung der Methode zur Analyse von Spannungsfeldern in Composites erfolgt beispielsweise durch Lindemann und Becker [60, 61] mit Untersuchungen zum Laminat-Randeffekt am geraden Rand sowie an Lochrändern oder durch Wigger und Becker [101] mit Untersuchungen zu Laminatcken. Die Analyse von Spannungssingularitäten mithilfe der RFEM in rein linear-elastischen Konfigurationen wird für zweidimensionale Situationen von Song und Wolf [92] beschrieben, und für einige zwei- und dreidimensionale Situationen von Longeru u. a. [63], Mittelstedt und Becker [70] und Mittelstedt [69].

Song und Vrcelj [88] verwenden die Methode zur Berechnung von dynamischen Spannungsintensitätsfaktoren.

Neueste Arbeiten beschäftigen sich unter anderem mit der Modellierung von dynamischem Rissfortschritt mit der RFEM (Ooi und Yang [72]), mit der Erweiterung auf nichtlineare Differentialgleichungen (Lin und Liao [59]) und der Modifizierung der Methode für elastodynamische Probleme in dreidimensionalen geschichteten Konfigurationen (Birk und Behnke [12]).

Piezoelektrische Composites

Die Entdeckung des piezoelektrischen Effekts wird in der Literatur den Brüdern Jacques und Pierre Curie im Jahr 1880 zugeschrieben. Sie beobachteten dieses Verhalten zunächst an Turmalin, später auch an anderen Kristallen wie Quarz. Erste technische Anwendungen waren piezoelektrische Resonatoren oder Ultraschallwandler mit Quarzkristallen, die vor allem im militärischen Bereich zur Nachrichtenübermittlung unter Wasser eingesetzt wurden. Es folgte der Einsatz zur Frequenzstabilisierung im Rundfunkbereich. Die Entwicklung von Piezokeramiken wie Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) und Barium-Titanat (BTO), die heute überwiegend im Einsatz sind, erfolgte ungefähr ab 1945. Heute finden piezoelektrische Keramiken in vielen technischen Bereichen Einsatz als Sensoren und Aktoren. Damit besteht natürlich auch verstärktes Interesse an der Erforschung des Verhaltens von piezoelektrischen Bauteilen in Verbundstrukturen.

Grundlagen der Piezoelektrizität finden sich in Cady [17] und Berlincourt u. a. [10] oder Ikeda [50]. Werke mit Fokus auf dem Einsatz von piezoelektrischen Materialien in sogenannten „Smart Structures“ oder adaptiven Strukturen sind beispielsweise Janocha [51] und Srinivasan und McFarland [95].

Gopinathan u. a. [44] liefern einen Überblick über in der Literatur verwendete Theorien für piezoelektrische Laminat, die zumeist Erweiterungen der klassischen Laminattheorie darstellen. Darauf basierend werden zur Untersuchung von piezoelektrischen Laminaten und Multimaterialkonfigurationen in der Literatur überwiegend Finite-Elemente-Modellierungen genutzt. Einen Überblick über diese und über die Entwicklungen von verschiedenen Elementen beispielsweise für Schalen und Platten gibt Benjeddou [8].

Einige Arbeiten widmen sich der Analyse von bruchmechanischen Vorgängen in piezoelektrischen Strukturen. Kuna [54] bemerkt hierzu, dass piezoelektrische Bruchmechanik ein etabliertes Gebiet ist, zur Anwendung auf realistische Risskonfigurationen jedoch eine numerische Untersuchung notwendig ist und bietet einen Überblick über die Literatur zur Analyse von zwei- und dreidimensionalen Risskonfigurationen in piezoelektrischen

Strukturen. Andere Arbeiten zu Rissen in piezoelektrischen Konfigurationen sind beispielsweise Suo u. a. [96] oder Sosa und Pak [94], die jedoch nur ebene Risse in homogenem Material beziehungsweise in einer Bimaterialkonfiguration abdecken. Sosa [93] untersucht ebene Konfigurationen mit Defekten.

Das Problem eines ebenen Multimaterialkerbs mit piezoelektrischem Materialverhalten untersuchen Xu und Rajapakse [112] im Hinblick auf elektroelastische Singularitäten. Ist das analoge elastische Problem bereits umfangreich untersucht, so liefert die Arbeit von Xu und Rajapakse [112] die erste umfangreiche analytische und numerische Untersuchung dieser Konfiguration mit piezoelektrischem Materialverhalten.

Verschiedene Autoren widmen sich einzelnen speziellen ebenen Konfigurationen. So untersuchen beispielsweise Weng und Chue [99] ebenso die Spannungssingularitäten in zweidimensionalen Multimaterialkerben, Kuo und Barnett [55] Spannungssingularitäten in Grenzflächenrissen und Shang und Kitamura [82] die Spannungssingularität im Interface-Rand eines dünnen piezoelektrischen Films auf einem elastischen Substrat.

Einen Überblick über die Forschung zu piezoelektrischen Composites und insbesondere den Randeffect liefern Davi und Milazzo [25]. Auch hier werden zumeist Finite-Elemente-Modellierungen verwendet. Es gibt auch Ansätze mit der Rand-Elemente-Methode, die jedoch laut Davi und Milazzo [25] einige wesentliche Aspekte wie interlaminare Spannungen am freien Rand nicht erfassen.

Die Analyse von piezoelektrischen Laminaten mit der Rand-Finite-Elemente-Methode ist Gegenstand der Arbeit von Artel und Becker [2], der dafür die Rand-Finite-Elemente-Methode für piezoelektrisches Materialverhalten erweitert.

Es liegen also Arbeiten zu bruchmechanischen Themen für piezoelektrische Composites vor, diese verwenden jedoch zum einen größtenteils die Finite-Elemente-Methode, zum anderen ist speziell die Ermittlung von Singularitätsordnungen überwiegend auf ebene Konfigurationen fokussiert. Auf dem Gebiet der Ermittlung von Spannungssingularitäten für allgemeine piezoelektrische dreidimensionale Multimaterialkonfigurationen besteht noch Forschungsbedarf.

1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit

Für viele Situationen stehen Singularitätsordnungen in der Literatur bislang noch nicht zur Verfügung. Für linear-elastische Materialien sind dies insbesondere dreidimensionale Multimaterialkonfigurationen, für piezoelektrisches Materialverhalten auch bereits einige zweidimensionale Konfigurationen. Zur bruchmechanischen Bewertung von Struk-

turen in der Praxis ist die Kenntnis der Singularitätsordnung für möglichst viele Konfigurationen jedoch eine wichtige Voraussetzung. Daher ist ein Ziel dieser Arbeit, durch geeignete Modellbildung weitere Singularitätsordnungen für Konfigurationen, in denen sie bisher unbekannt sind, zur Verfügung zu stellen.

Da weiterhin die gängigen Methoden zur Ermittlung von Singularitätsordnungen meist nur eingeschränkt anwendbar sind und einen hohen Rechenaufwand erfordern, besteht Bedarf an einer effizienten Methodik zur Ermittlung der Singularitätsordnungen mit möglichst weitreichenden Einsatzmöglichkeiten. Die Rand-Finite-Elemente-Methode, die bereits zur Untersuchung einzelner dreidimensionaler linear-elastischer Konfigurationen sowie zur Untersuchung von Randeffekten in piezoelektrischen Laminaten erfolgreich eingesetzt wurde, soll daher auf ihre Tauglichkeit als Analysewerkzeug für Singularitätsordnungen in dreidimensionalen piezoelektrischen Konfigurationen weiter erforscht werden. Insbesondere Anforderungen an Netze und resultierende Rechenzeiten sollen hier überprüft werden, um zu beurteilen ob die Methodik leicht und mit begrenztem Rechenaufwand für vielfältige Konfigurationen übertragbar ist.

Bei gegebenen Konfigurationen ist es oft von Interesse wie sich die Singularitätsordnung in Abhängigkeit bestimmter Parameter – beispielsweise einem Winkel oder einem Materialkennwert – verhält. Dies kann bei der Konstruktion hilfreiche Hinweise zu bevorzugten Konfigurationen liefern. Daher sollen im Rahmen dieser Arbeit mithilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode für bestimmte Konfigurationen Optimierungen im Hinblick auf eine maximale oder minimale Singularitätsordnung durchgeführt werden.

Da Singularitätsordnungen für zweidimensionale geometrische oder materielle Diskontinuitäten häufiger bekannt sind oder deren analytische oder numerische Ermittlung mit geringerem Aufwand durchführbar ist als für echt dreidimensionale Konfigurationen, ist eine interessante Fragestellung, ob es Zusammenhänge in Form einfacher Bildungsgesetze an Stellen gibt, an denen zwei oder mehr zweidimensionale Diskontinuitäten aufeinandertreffen. Falls solche Bildungsgesetze bestehen, lässt sich die Ermittlung von Singularitätsordnungen in einigen dreidimensionalen Situationen auf zweidimensionale Werte zurückführen und der Aufwand ist wesentlich geringer als eine komplette dreidimensionale Analyse. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist daher die Untersuchung von bestimmten dreidimensionalen Situationen im Hinblick auf solche potenziellen Gesetzmäßigkeiten.

Ein weiterer Punkt von Interesse ist die Qualität der auftretenden Singularitätsordnung für eine Konfiguration mit piezoelektrischem Materialverhalten im Vergleich mit rein linear-elastischem Materialverhalten. Die Frage, welchen Einfluss das Material auf die Singularitätsordnung bei gleichen geometrischen Situationen hat, wird daher ebenfalls erörtert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: nach dem einleitenden Kapitel folgt eine Darstellung der verwendeten theoretischen Grundlagen in Kapitel 2. Hier werden zunächst die allgemeinen Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie sowie die Grundgleichungen für piezoelektrisches Materialverhalten aufgeführt. In nächsten Abschnitt werden bruchmechanische Grundlagen und die allgemeine Definition und Bedeutung von Spannungssingularitäten dargestellt. Es folgt eine kurze Herleitung der Rand-Finite-Elemente-Methode in der Erweiterung für piezoelektrisches Materialverhalten.

In Kapitel 3 werden zunächst einige Anmerkungen zur verwendeten Implementierung und Allgemeines zur Modellbildung mit der Methode aufgeführt. Es folgt eine Untersuchung von dreidimensionalen Konfigurationen für linear-elastische Materialien. Neben der allgemeinen Bereitstellung von Ergebnissen für verschiedene Konfigurationen liegt das Augenmerk auf der Analyse von Situationen, bei denen zwei zweidimensionale linienartige Diskontinuitäten an einem dreidimensionalen Interaktionspunkt aufeinandertreffen. Eine zentrale Frage ist hier, ob sich ein Zusammenhang der Singularitätsordnung des dreidimensionalen Interaktionspunkts mit den Singularitätsordnungen der zweidimensionalen Diskontinuitäten ermitteln lässt.

Die Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen in verschiedenen zwei- und dreidimensionalen Konfigurationen mit linear-elastischen Materialien wird in Kapitel 4 vorgestellt. Variable Parameter sind hierbei geometrische Größen wie Winkel oder Materialdaten wie der Elastizitätsmodul.

Die Betrachtung von piezoelektrischen Konfigurationen wird in Kapitel 5 dargelegt. Hier ist eine zentrale Fragestellung, inwieweit sich die Singularitätsordnungen für bestimmte geometrische Situationen für piezoelektrisches Materialverhalten von den Werten für linear-elastisches Materialverhalten unterscheiden und welche allgemeinen Rückschlüsse sich daraus gegebenenfalls auf den Einfluss von piezoelektrischem Materialverhalten auf die auftretenden Singularitätsordnungen ziehen lassen.

In Kapitel 6 folgt eine Zusammenfassung der Arbeit mit einem Ausblick auf weitere interessante Fragestellungen, die sich daraus ergeben.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst die notwendigen Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie, in deren Rahmen die Analyse von Spannungssingularitäten durchgeführt wird, dargestellt. Anschließend werden die Feldgleichungen für piezoelektrisches Materialverhalten aufgeführt. Einige Grundlagen der Bruchmechanik werden dargelegt, um die Definition und Bedeutung von Spannungssingularitäten zu erläutern. Es folgt eine kurze Herleitung der Rand-Finite-Elemente-Methode in der Erweiterung für piezoelektrisches Materialverhalten.

2.1 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie sind in zahlreichen Werken dargestellt und werden daher hier nur skizziert. Ausführliche Darlegungen finden sich zum Beispiel in Becker und Gross [7], Betten [11], Eschenauer und Schnell [39] oder Green und Zerna [45].

Ein allgemeines linear-elastisches Problem lässt sich durch einen Satz an Feldgleichungen – den Gleichgewichtsbedingungen, der Kinematik und einem Materialgesetz – und zugehörigen Randbedingungen beschreiben. Im statischen Fall lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

wobei σ_{ij} die Komponenten des symmetrischen Cauchy'schen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und f_i die Komponenten der Volumenkraft \mathbf{f} darstellen. Die geometrisch lineare Kinematik ist durch

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

gegeben. Hier sind ε_{ij} die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ und u_i die Komponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{u} . Da dieses Gleichungssystem kinematisch überbestimmt ist, müssen zusätzlich die Kompatibilitätsbedingungen

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.3)$$

erfüllt werden.

Das Materialverhalten wird durch das Elastizitätsgesetz in allgemeiner Form

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

beschrieben. c_{ijkl} sind hierbei die Komponenten des Elastizitätstensors \mathbf{c} vierter Stufe.

Da der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ aufgrund der Forderung nach lokalem Momentengleichgewicht symmetrisch ist ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), besitzt er sechs unabhängige Komponenten und lässt sich wie folgt darstellen

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ wiederum ist laut Definition symmetrisch und somit darstellbar als

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Durch die Symmetrien des Cauchy'schen Spannungstensors und des linearisierten Verzerrungstensors gelten auch für den Elastizitätstensor Symmetriebedingungen, sodass von 81 Komponenten nur 36 voneinander unabhängig sind und der Elastizitätstensor als Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} dargestellt werden kann. Bei Existenz einer Formänderungsenergie ist diese Steifigkeitsmatrix weiterhin symmetrisch und es verbleiben maximal 21 unabhängige Komponenten. Oft wird daher für das Elastizitätsgesetz (2.4) auch die folgende Darstellung in Voigt-Notation gewählt:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.7)$$

wobei C_{ij} hier die Komponenten der symmetrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} darstellen und die einfach indizierten Spannungen und Verzerrungen in folgender Vektorform notiert werden:

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T, \quad (2.8)$$

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}]^T. \quad (2.9)$$

Diese Darstellung wird auch im Weiteren zur Herleitung der Rand-Finite-Elemente-Methode verwendet.

Mechanische Randbedingungen, die ebenso zur Beschreibung eines linear-elastischen Problems notwendig sind, können für Verschiebungen oder Kräfte formuliert werden. Üblicherweise wird hierbei auf Teilen der Körperoberfläche ∂V der Spannungsvektor \mathbf{t} oder der Verschiebungsvektor \mathbf{u} vorgegeben.

Für ebene Strukturen, deren Geometrie in z-Richtung unveränderlich ist, liegt ein ebener Verzerrungszustand (EVZ) vor, wenn sie nur in ihrer Ebene belastet sind und Verschiebungen in z-Richtung verhindert sind. Für diesen Fall sind die anderen Verschiebungskomponenten von z unabhängig ($u_3 = 0$, $u_1 = u_1(x, y)$, $u_2 = u_2(x, y)$) und nur die

Verzerrungen ε_x , ε_y und γ_{xy} verschwinden nicht. Dadurch verbleiben nur noch die folgenden drei Gleichungen für das Elastizitätsgesetz

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

τ_{xy} ist hierbei eine Schubspannungskomponente von $\boldsymbol{\sigma}$, $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ die technische Gleitung, E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl.

Die Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung ist beim EVZ identisch erfüllt und die Bedingungen in x- und y-Richtung vereinfachen sich zu

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0, \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + f_y = 0.\tag{2.11}$$

Die Kompatibilitätsbedingungen reduzieren sich für den EVZ auf die Gleichung

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \gamma_{xy,xy} = 0.\tag{2.12}$$

Wird ein elastischer Körper aus einem verzerrungslosen Ausgangszustand deformiert, so leisten die Spannungen die Arbeit U pro Volumeneinheit, die sich wie folgt durch Integration ergibt (siehe z.B. [7]):

$$U = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.\tag{2.13}$$

$U = U(\varepsilon_{ij})$ wird als Formänderungsenergiedichte bezeichnet. Da diese bei einem elastischen Körper nicht von der Deformationsgeschichte abhängt, ist $dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ein vollständiges Differential der Form

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}\tag{2.14}$$

und es folgt für die Spannungen

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}.\tag{2.15}$$

Für linear-elastisches Materialverhalten gilt für die Formänderungsenergiedichte

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.\tag{2.16}$$

2.2 Piezoelektrisches Materialverhalten

Bei piezoelektrischen Materialien treten neben den eingeführten mechanischen Feldgrößen noch elektrische Feldgrößen auf. Charakteristisch ist hier, dass sich die mechanischen und die elektrischen Größen gegenseitig beeinflussen. Hat bei einem rein elastischen Material beispielsweise eine Verzerrung eine Auswirkung auf das Spannungsfeld, so kann bei piezoelektrischem Verhalten durch mechanische Deformation auch ein elektrisches Feld entstehen. Dies ist der sogenannte piezoelektrische Effekt. Verursacht umgekehrt das Aufbringen eines elektrischen Feldes eine Verzerrung, spricht man vom inversen piezoelektrischen Effekt. Ersterer wird für Sensoren, letzterer für Aktoren genutzt.

Die Definition der elektrischen Feldgrößen und die Standardgleichungen für piezoelektrisches Materialverhalten sind in gängigen Physiklehrbüchern wie beispielsweise in Gertshen [40] oder Hering u. a. [49] zu finden.

Statt des Elastizitätsgesetzes (2.7) wird das Materialverhalten nun durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}\end{aligned}\tag{2.17}$$

beschrieben (siehe z.B. Benjeddou [8]). Hier treten neben den bekannten mechanischen Größen die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die dielektrische Verschiebung (oder auch Flussdichte) \mathbf{D} sowie die Matrix der dielektrischen Konstanten $\boldsymbol{\epsilon}$ und die piezoelektrische Matrix \mathbf{e} auf. Bei den zwei letzten Größen handelt es sich um Materialkonstanten. Die Gleichungen sind wie die elastischen Materialgesetze auf den linearen Bereich beschränkt, außerdem wird unveränderliche Polarisierung vorausgesetzt.

Die Größen elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} sind hierbei Vektoren der Form

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix}^T.\tag{2.18}$$

Für das piezoelektrische Material wird transversal isotropes Materialverhalten mit der Polarisationsrichtung in z-Richtung angenommen. Die Materialkonstanten lassen sich dann wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.19}$$

Zur Bedingung (2.1) für elastostatisches Gleichgewicht kommt die Bedingung für elektrostatisches Gleichgewicht

$$D_{i,i} - q = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

hinzu. q ist hierbei die Raumladung.

Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} kann wie folgt durch das elektrische Potential φ dargestellt werden:

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

Elektrische Randbedingungen werden üblicherweise für das Potential φ oder die Normalkomponente D_n der dielektrischen Verschiebung aufgestellt.

2.3 Spannungssingularitäten in der linear-elastischen Bruchmechanik

Zum Verständnis von Spannungssingularitäten und deren Singularitätsordnungen werden hier grundlegende Definitionen der Bruchmechanik aufgeführt. Für ausführliche Darlegungen der linearen Bruchmechanik sei auf Fachliteratur wie beispielsweise Gross und Seelig [46] verwiesen.

Es handelt sich bei den betrachteten Spannungssingularitäten um rein theoretische Phänomene, da in einer realen Struktur stets plastisches Fließen oder Versagen auftritt, bevor das Spannungsfeld lokal einen singulären Wert annehmen kann. Da sich Spannungssingularitäten trotz ihrer theoretischen Natur jedoch als guter Indikator für potentielle Schwachstellen in Konfigurationen erwiesen haben, ist eine theoretische Untersuchung berechtigt und sinnvoll.

Singularitäten im Spannungsfeld können hierbei einerseits durch konzentrierte äußere Lasten verursacht werden – so wird eine Struktur durch eine Punktlast offensichtlich lokal hoch beansprucht – und andererseits durch materielle oder geometrische Diskontinuitäten in einer Struktur, beispielsweise einem Material-Interface oder einer Kerbe. Hierbei sind Singularitäten, die durch äußere Lasten entstehen, üblicherweise leicht aufzuspüren, wohingegen das Vorliegen einer Spannungssingularität bei geometrischen oder materiellen Diskontinuitäten nicht immer auf den ersten Blick ersichtlich ist. Im Rahmen dieser Arbeit sind nur die Singularitäten, die durch den Aufbau einer Struktur entstehen, von Interesse.

Wenn Spannungssingularitäten auftreten, können die asymptotischen lokalen Verschiebungs- und Spannungsfelder zweidimensional mit Polarkoordinaten r, φ oder dreidimen-

sional mit Kugelkoordinaten r, φ_1, φ_2 wie folgt dargestellt werden (die Singularität liegt hierbei bei $r = 0$, siehe Abbildung 1):

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} K_m r^{\lambda_m} g_{im}(\varphi_1, \varphi_2) \quad , \quad \sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} K_m r^{\lambda_m-1} f_{ijm}(\varphi_1, \varphi_2) \quad . \quad (2.22)$$

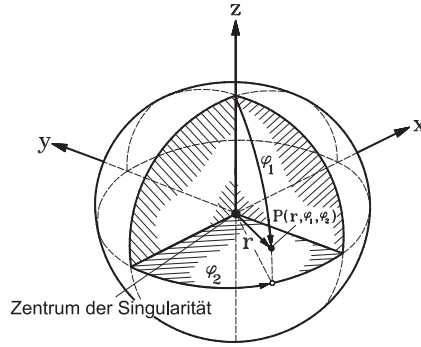


Abbildung 1: Kugelkoordinatensystem mit Ursprung im Zentrum der Singularität.

Hierbei wird in radialer Richtung ein Exponentialansatz verwendet. Die Funktionen g_{im} und f_{ijm} stellen die Variation über den Winkel dar. Die Spannungssingularitäten werden durch die generalisierten Spannungsintensitätsfaktoren K_m sowie die Singularitätsordnungen oder -exponenten charakterisiert. Letztere sind allgemein komplexe Zahlen der Form $(Re(\lambda_m) - 1, Im(\lambda_m))$. Bei homogenen linear-elastischen Konfigurationen sind die Eigenwerte rein reell, bei allgemeinen Konfigurationen treten jedoch auch komplexwertige Werte auf. Liegen Imaginärteile vor, oszillieren die Spannungen im Bereich des Zentrums der Singularität.

Singuläre Spannungen liegen vor, wenn $0 > Re(\lambda_m) - 1 > -1$. Die obere Grenze ergibt sich aus der Funktion: für $Re(\lambda_m) - 1 > 0$ bleiben die Werte der Spannungen mit $\sigma_{ij} \sim r^{Re(\lambda_m)-1}$ endlich. Damit ist der Bereich $Re(\lambda_m) - 1 > 0$ für die Untersuchungen von Spannungssingularitäten nicht relevant. Die untere Grenze ergibt sich aus der Forderung, dass die Formänderungsenergie beschränkt sein muss. Hierfür muss die Formänderungsenergiedichte in einem Bereich um das Zentrum der Singularität integrierbar sein.

Die Formänderungsenergie W_F ergibt sich durch Integration über das Volumen V aus der Formänderungsenergiedichte

$$W_F = \int_V U dV. \quad (2.23)$$

Da $\sigma_{ij} \sim r^{Re(\lambda_m)-1}$ und ebenso $\varepsilon_{ij} \sim r^{Re(\lambda_m)-1}$, gilt mit Gleichung (2.16) $U \sim r^{2(Re(\lambda_m)-1)}$.

Für Polarkoordinaten ist $dV \sim r dr$, für Kugelkoordinaten gilt $dV \sim r^2 dr$. Also gilt für den Integrand $U dV$

$$U dV \sim r^{2(Re(\lambda_m)-1)+1} dr \quad \text{in 2D,} \quad (2.24)$$

$$U dV \sim r^{2(Re(\lambda_m)-1)+2} dr \quad \text{in 3D} \quad (2.25)$$

und demnach für die Formänderungsenergie

$$W_F \sim r^{2(Re(\lambda_m)-1)+2} \quad \text{in 2D,} \quad (2.26)$$

$$W_F \sim r^{2(Re(\lambda_m)-1)+3} \quad \text{in 3D.} \quad (2.27)$$

Um die Forderung einer beschränkten Formänderungsenergie zu erfüllen, muss der Exponent von r größer null sein. Hieraus ergibt sich für die Singularitätsordnung $Re(\lambda_m) - 1$

$$Re(\lambda_m) - 1 > -1 \quad \text{in 2D,} \quad (2.28)$$

$$Re(\lambda_m) - 1 > -1,5 \quad \text{in 3D.} \quad (2.29)$$

Es sei angemerkt, dass in der Literatur teilweise die Notation mit λ auch so verwendet wird, dass $\sigma_{ij} \sim r^{Re(\lambda)}$ und $u_i \sim r^{Re(\lambda)+1}$ gilt und $Re(\lambda)$ somit dem Ausdruck $Re(\lambda_m) - 1$ entspricht. In den folgenden Kapiteln wird zur Darstellung der Ergebnisse die Notation mit λ verwendet, sodass $0 > Re(\lambda) > -1$ gilt.

Bei Betrachtung der Reihendarstellung in Gleichung (2.22) ist ersichtlich, dass mehrere Terme und Eigenwerte zu singulären Werten führen können. Wenn mehrere Eigenwerte zu singulären Spannungen führen, ist jeweils der betragsmäßig größte für die Singularitätsordnung ausschlaggebend, da dieser im Abklingverhalten dominiert. In den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit werden üblicherweise der Vollständigkeit halber alle ermittelten Eigenwerte dargestellt, die zu singulären Spannungen führen.

Ein bekanntes Beispiel ist die Singularität an einer Rissspitze, hier gilt $\sigma_{ij} \sim r^{-0,5}$ und die Rissspitzensingularitätsordnung ist somit $-0,5$. Da dieser Wert in ebenen homogenen linear-elastischen Konfigurationen die stärkste Singularitätsordnung ist, die auftreten kann, und somit eine besondere Rolle einnimmt, wird die Rissspitzensingularität oft als Vergleichswert für andere Singularitätsordnungen herangezogen. So werden Singularitäten mit betragsmäßig kleineren Singularitätsordnungen als die Rissspitzensingularitätsordnung, also $0 > Re(\lambda_m) - 1 > -0,5$, als schwache Singularitäten bezeichnet, wohingegen Singularitäten mit Werten im Bereich $-0,5 > Re(\lambda_m) - 1 > -1$ (bzw. $-0,5 > Re(\lambda_m) - 1 > -1,5$ im Dreidimensionalen) als starke Singularitäten oder Hypersingularitäten bezeichnet werden.

Es kann auch eine logarithmische Singularität auftreten, sodass ein Zusammenhang zwischen Spannung und Radial-Koordinate in der Form $\sigma_{ij} \sim r^{\lambda-1} \ln r$ besteht. Solche treten an Übergangsstellen von reellen zu komplexwertigen Eigenwerten auf (siehe z.B. Dempsey [30]). Üblicherweise sind diese Singularitäten jedoch schwächer als reine Potenzsingularitäten (vgl. Sinclair [84] oder Sator [80]). Da sie eben nur an speziellen Übergangspunkten auftreten, sind sie allerdings in der Regel schwieriger aufzudecken. Innerhalb der Analysen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode werden logarithmische Singularitäten implizit durch Verzweigungspunkte bei den berechneten Singularitätsordnungen abgebildet. Für das Auftreten von logarithmischen Singularitäten können Bedingungen formuliert werden, da sie mit mehrfachen Nullstellen des Eigenwertproblems zusammenhängen. Dies soll hier jedoch nicht weiter erörtert werden, da das Hauptaugenmerk im Rahmen dieser Arbeit auf der Ermittlung der Singularitätsexponenten $Re(\lambda_m) - 1$ liegt.

Insgesamt ist die Singularitätsordnung einer Spannung nicht der einzige Parameter, der zur bruchmechanischen Bewertung benötigt wird. Für die gängigen Kriterien werden ebenso weitere Parameter wie die generalisierten Spannungsintensitätsfaktoren, die das Spannungsfeld charakterisieren, benötigt. Die Singularitätsordnungen alleine können jedoch bereits für eine erste grobe Einschätzung zur Kritikalität einer Situation herangezogen werden. In jedem Fall ist die Kenntnis der Singularitätsordnungen für die bruchmechanische Bewertung einer Struktur notwendig.

In piezoelektrischen Strukturen können sowohl die Spannungen als auch elektrische Feldgrößen singulär werden. Es kann dann sowohl mechanisches Versagen als auch dielektrisches Versagen auftreten. Analog zu den Spannungen mit $\sigma_{ij} \sim r^{Re(\lambda_m)-1}$ und den Verschiebungen mit $u_{ij} \sim r^{Re(\lambda_m)}$ gilt hier $D_i \sim r^{Re(\lambda_m)-1}$ für die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} und $\varphi \sim r^{Re(\lambda_m)}$ für das elektrische Potential φ . Für einen Riss mit impermeablen Rändern gilt beispielsweise $D_i \sim r^{-0,5}$ (vgl. Gross und Seelig [46] oder Sosa und Pak [94]), sodass die dielektrische Verschiebung die gleiche Singularitätsordnung wie die Spannungen besitzt.

2.4 Rand-Finite-Elemente-Methode für piezoelektrische Probleme

Die Rand-Finite-Elemente-Methode ist eine semi-analytische Methode, welche die Vorteile der Finite-Elemente-Methode mit denen der Rand-Elemente-Methode vereint. Sie wurde von Wolf und Song [108] entwickelt und von Artel und Becker [2] für piezoelektrisches Materialverhalten erweitert. Die Methode basiert auf einer starken Form in

radialer Richtung oder auch Skalierungsrichtung und einer schwachen Form in die anderen Richtungen. Somit ist nur eine Diskretisierung des Randes beziehungsweise der Oberfläche erforderlich. Im Unterschied zur Rand-Elemente-Methode bedarf es jedoch keiner Fundamentallösung. Voraussetzung zur Anwendbarkeit der Methode ist, dass die betrachtete Struktur ein Ähnlichkeitskriterium erfüllt: die Struktur muss in Bezug auf einen diskreten Punkt, das sogenannte Ähnlichkeitszentrum, skalierbar sein. Die Rand-Finite-Elemente-Methode ist für beliebiges anisotropes linear-elastisches Materialverhalten einsetzbar.

Spannungssingularitätsordnungen können anhand der RFEM mit geringem Aufwand und hoher Genauigkeit ermittelt werden, wenn das Ähnlichkeitszentrum direkt in das Singularitätszentrum gelegt wird. Die Rand-Finite-Elemente-Methode kann zur Analyse von Situationen herangezogen werden, wo andere Methoden nicht einsetzbar sind. Im Allgemeinen ist zudem der Aufwand geringer als bei anderen Methoden wie beispielsweise der Finite-Elemente-Methode. Dies ist zum einen darin begründet, dass die Methode die Problemdimension durch die Vernetzung des Randes um eins reduziert, zum anderen erzielt bereits eine relativ grobe Vernetzung im Ähnlichkeitszentrum sehr genaue Ergebnisse, wohingegen bei anderen Methoden eine sehr genaue Vernetzung erforderlich ist, um eine Singularität überhaupt zu erfassen.

Die Herleitung der Methode für den elastostatischen Fall wird in Deeks und Wolf [28] in Anlehnung an die Finite-Elemente-Methode mit Energieprinzipien dargestellt. Die Anwendung der Finite-Elemente-Methode für piezoelektrisches Materialverhalten wird in Benjeddou [8] erläutert. Diese beiden Vorgehen werden von Artel [1] zur Herleitung der Rand-Finite-Elemente-Methode für piezoelektrisches Materialverhalten genutzt. Im Folgenden wird die Herleitung für piezoelektrisches Material ohne Volumenlasten und Lage des Ähnlichkeitszentrums innerhalb des Gebiets skizziert. Für Details der Herleitung ebenso wie für das Vorliegen mechanischer oder elektrischer Volumenlasten sowie für eine Lage des Ähnlichkeitszentrums außerhalb des Kontinuums sei auf die genannte Literatur verwiesen.

Die Standardgleichungen für piezoelektrisches Material (2.17) und die Bedingungen (2.1) und (2.20) für elastostatisches und elektrostatisches Gleichgewicht führen zusammen mit den geometrisch linearen kinematischen Gleichungen (2.2) und der Darstellung der elektrischen Feldstärke durch das elektrische Potential (2.21) auf die folgende schwache Form des Gleichgewichts

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.30)$$

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T (\mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}) \, d\Omega = \int_{\Omega} q \delta \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma} Q \delta \varphi \, d\Gamma \quad (2.31)$$

Hierbei ist Ω das Gebiet und Γ der Rand des betrachteten Kontinuums, Q die Oberflächenladung und \mathbf{t} der Spannungsvektor.

Durch die Einführung der Koordinaten ξ in Skalierungsrichtung sowie η und ζ entlang des Randes Γ (siehe Abb. 2 für eine Darstellung des zweidimensionalen Falles mit ξ und η) sowie die Darstellung des Randes durch eine Menge von Punkten $(x_0 + x_S)$, $(y_0 + y_S)$ und $(z_0 + z_S)$ können die Koordinaten innerhalb des Gebiets aus einem kartesischen Koordinatensystem wie folgt transformiert werden:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi x_S(\eta, \zeta), \\ y &= y_0 + \xi y_S(\eta, \zeta), \\ z &= z_0 + \xi z_S(\eta, \zeta). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Hier sind (x_0, y_0, z_0) die Koordinaten des Ähnlichkeitszentrums S , \mathbf{n} ist der Richtungsvektor in Skalierungsrichtung und ξ ist der Skalierungsfaktor in radialer Richtung (siehe z.B. Deeks und Wolf [28]).

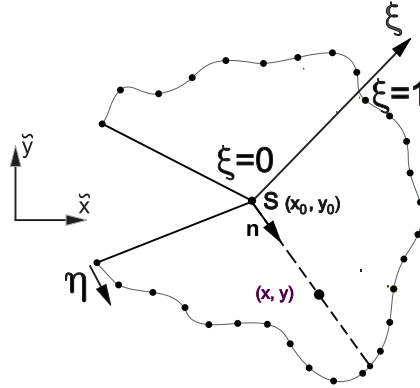


Abbildung 2: Skalierte Randkoordinaten in 2D.

Die Diskretisierung des Randes erfolgt durch eine näherungsweise Darstellung der Geometrie mithilfe der Ansatzfunktionen \mathbf{h} sowie der Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} der Knotenkoordinaten in der Form

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \mathbf{h}^T(\eta, \zeta) \mathbf{x}, \\ y &= y_0 + \xi \mathbf{h}^T(\eta, \zeta) \mathbf{y}, \\ z &= z_0 + \xi \mathbf{h}^T(\eta, \zeta) \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Einsetzen der folgenden Näherung der Verschiebungen u_i und des elektrischen Potentials φ mithilfe der Ansatzfunktionen \mathbf{h} und der analytischen Knotenverschiebungsfunktionen $\mathbf{w}_h(\xi)$

$$\mathbf{w}(\xi, \eta, \zeta) \approx \mathbf{h}^T(\eta, \zeta) \mathbf{w}_h(\xi) \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T \quad (2.34)$$

sowie einer analogen Näherung für die virtuellen Größen in die schwache Form des Gleichgewichts (2.30) und (2.31) führt ohne Volumenkräfte und -ladungen durch einige Umformungen und partielle Integration auf die Gleichung

$$\int_{\xi=0}^1 \delta \mathbf{w}^T \left[\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{w}_h(\xi)_{,\xi\xi} + (2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \mathbf{w}_h(\xi)_{,\xi} + (\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2) \mathbf{w}_h(\xi) \right] d\xi = \delta \mathbf{w}^T [\mathbf{E}_0 \mathbf{w}_{h,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{w}_h]. \quad (2.35)$$

Die Systemsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \int_{\Gamma} \mathbf{B}_1^T \mathbf{H} \mathbf{B}_1 |\mathbf{J}| d\eta d\zeta, \\ \mathbf{E}_1 &= \int_{\Gamma} \mathbf{B}_2^T \mathbf{H} \mathbf{B}_1 |\mathbf{J}| d\eta d\zeta, \\ \mathbf{E}_2 &= \int_{\Gamma} \mathbf{B}_2^T \mathbf{H} \mathbf{B}_2 |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (2.36)$$

mit der Jacobi-Matrix \mathbf{J}

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

der Hilfsmatrix \mathbf{H} , die das konstitutive elektrisch-elastische Verhalten beschreibt,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

mit den Verschiebungs-Verzerrungs-Operator-Matrizen \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mathbf{L}_{\xi} \mathbf{h}^T(\eta, \zeta), \\ \mathbf{B}_2 &= \mathbf{L}_{\eta} \frac{\partial \mathbf{h}^T(\eta, \zeta)}{\partial \eta} + \mathbf{L}_{\zeta} \frac{\partial \mathbf{h}^T(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (2.39)$$

und dem linearen Operator \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^T, \quad (2.40)$$

der ebenso auf folgende Darstellung in skalierten Rand-Koordinaten umgeformt werden kann

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{L}_{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{L}_{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (2.41)$$

Die Matrizen \mathbf{L}_ξ , \mathbf{L}_η und \mathbf{L}_ζ beinhalten hierbei Komponenten der inversen Jacobi-Matrix \mathbf{J}^{-1} .

Da Gleichung (2.35) für beliebige kinematisch zulässige virtuelle Veränderliche gelten muss, resultieren aus der linken Seite folgende Euler-Cauchy-Differentialgleichungen

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + [2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1] \xi \mathbf{w}_{h,\xi} - [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1^T] \mathbf{w}_h = 0. \quad (2.42)$$

Diese besitzen eine Lösung der Art

$$\mathbf{w}_h(\xi) = \xi^{\lambda_k} \mathbf{\Phi}_k \quad (2.43)$$

mit einem Potenzansatz bezüglich ξ . λ_k ist ein modaler Exponent in radialer Richtung und der Vektor $\mathbf{\Phi}_k$ stellt die Verschiebungsmoden dar. Dies führt auf das quadratische Eigenwertproblem

$$[\lambda_k^2 \mathbf{E}_0 + \lambda_k (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) - (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1^T)] \mathbf{\Phi}_k = 0, \quad (2.44)$$

welches durch Standardverfahren für Eigenwertprobleme gelöst werden kann.

Der Vorteil der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Ermittlung der Singularitätsordnungen liegt darin, dass die Eigenwerte λ_k innerhalb des Lösungsverfahrens automatisch mit hoher Genauigkeit bestimmt werden. Somit liefert die Methode für die Singularitätsordnungen im Ähnlichkeitszentrum sehr genaue Ergebnisse.

3 Analyse von zwei- und dreidimensionalen linear-elastischen Konfigurationen

In diesem Kapitel werden rein linear-elastische Konfigurationen betrachtet. Vor der eigentlichen Modellbildung wird zunächst die verwendete Implementierung der Rand-Finite-Elemente-Methode vorgestellt. Da bei einer semi-analytischen Methode ebenso wie bei einer numerischen Methode die Herausforderung oft in der korrekten Anwendung liegt – bei der Finite-Elemente-Methode beispielsweise ist eine geeignete Diskretisierung entscheidend – folgen einige Anmerkungen zu Besonderheiten der Anwendung.

Nach einigen zwei- und dreidimensionalen Benchmark-Beispielen liegt der Fokus auf der Analyse von dreidimensionalen Situationen. Hier sollen einerseits bislang in der Literatur unbekannte Singularitätsordnungen für dreidimensionale Multimaterialkonfigurationen bereit gestellt werden. Zum anderen werden dreidimensionale Situationen, in denen zwei oder mehr zweidimensionale linienartige geometrische oder materielle Diskontinuitäten an einem dreidimensionalen Interaktionspunkt aufeinandertreffen, untersucht. Ziel ist es dabei, festzustellen ob ein Zusammenhang zwischen den Singularitätsordnungen der zweidimensionalen Diskontinuitäten und der Singularitätsordnung am dreidimensionalen Interaktionspunkt besteht.

3.1 Implementierung und Verifikation der Rand-Finite-Elemente-Methode

Für die Rand-Finite-Elemente-Methode existiert zurzeit keine kommerzielle Software, auf die zurückgegriffen werden kann, da sie bislang vorrangig in ausgewählten Spezialbereichen Anwendung findet. Die Modellbildung und Analyse im Rahmen dieser Arbeit erfolgte mit dem Programm Caesar, einer Fortran-Implementierung der Rand-Finite-Elemente-Methode in der Formulierung für piezoelektrisches Materialverhalten. Caesar wurde von Artel [1] zur Analyse von piezoelektrischen Laminaten am Fachgebiet Strukturmechanik der TU Darmstadt entwickelt.

Die Diskretisierung der untersuchten Konfigurationen erfolgt sowohl mit dem kommerziellen Programm Abaqus/CAE als auch manuell und mit eigens erstellten Vernetzungsroutinen. Für das Postprocessing wurde neben eigenen Hilfsroutinen überwiegend MATLAB verwendet.

Die zweidimensionalen Untersuchungen erfolgten mit C2-Kontinuumsselementen mit zwei Knoten und linearen Ansatzfunktionen, die dreidimensionalen mit C4-Kontinuumssele-

menten mit bilinearen Ansatzfunktionen. Als Freiheitsgrade besitzen die Elemente zwei beziehungsweise drei Verschiebungskomponenten. Es wird eine Gauss-Integration mit einem beziehungsweise vier Integrationspunkten durchgeführt. Höherwertige Elemente oder Dreieckselemente sind in der aktuellen Version von Caesar noch nicht implementiert, sind jedoch für die Analyse von Singularitätsordnungen auch nicht erforderlich.

Für die zweidimensionalen Konfigurationen wird im Allgemeinen zur Berechnung ein ebener Verzerrungszustand zugrunde gelegt, für die dreidimensionalen Konfigurationen wird der eines elastischen dreidimensionalen Kontinuums ausgewählt. Die Wahl der Lastfälle beziehungsweise der Randbedingungen spielt für die Ermittlung der Singularitätsordnungen keine Rolle und wird daher außen vor gelassen.

Die Rechenzeiten des Programms Caesar bewegen sich auf einem Intel(R) Pentium(R) 4 CPUs 3.00GHz, 1GB RAM Rechner ebenso wie auf einem 1x Dual Core AMD Opteron™ Processor 280, 2.4GHz, 16GB RAM Rechner für die untersuchten Konfigurationen zwischen einigen Sekunden für einfache zweidimensionale Analysen bis hin zu einigen Stunden für manche dreidimensionale Konfigurationen. Dabei kann das Programm im Hinblick auf Rechenzeiten zum Beispiel durch Verbesserung der numerischen Gleichungslöser bei Bedarf noch optimiert werden. Auch in der jetzigen Version ist jedoch die Untersuchung von verschiedenen Konfigurationen mit Variation von Material- oder Geometrieparametern mit Caesar gut durchführbar.

Zur zuverlässigen Analyse unbekannter Konfigurationen ist eine Verifikation sowohl der verwendeten Implementierung als auch der Methode selbst eine grundlegende Voraussetzung. Insbesondere bei den Spannungssingularitätsordnungen gibt es zwar einen Wertebereich außerhalb dessen Ergebnisse klar als unsinnig erkannt werden können, darüber hinaus können jedoch üblicherweise aus der Betrachtung der Situation keine eindeutigen Aussagen getroffen werden, ob ein Ergebnis richtig oder falsch ist. Eine Validierung durch experimentelle Daten ist ebenso nicht möglich. Die Zuverlässigkeit einer Methode ist damit ein entscheidendes Kriterium für die Wahl des Berechnungsverfahrens.

Die Rand-Finite-Elemente-Methode selbst wurde zur Ermittlung von Singularitätsordnungen in linear-elastischen Situationen bereits von Mittelstedt und Becker [70] durch Vergleich mit geeigneten Referenzbeispielen aus der Literatur grundlegend verifiziert. Die allgemeine Anwendung auf piezoelektrisches Materialverhalten in Multimaterialkonfigurationen wurde von Artel [1] verifiziert. Im Rahmen dieser Arbeit wurden einige weitere Grundlagenbeispiele berechnet, beispielsweise eine Kerbplatte aus piezoelektrischem Material unter Zug. Weiterhin wurden vor der eigentlichen Modellbildung einige Benchmarkbeispiele gerechnet, um speziell mit Vernetzungsanforderungen der Methode vertraut zu werden. Dabei zeigte sich, dass zur Ermittlung der Singularitätsordnungen

im Zentrum der Singularität, in welches das Ähnlichkeitszentrum der Methode sinnvollerweise gelegt wird, eine deutlich gröbere Vernetzung als beispielsweise für vergleichbare Finite-Elemente-Analysen ausreicht. Bei dreidimensionalen Situationen erscheint es in einigen Fällen von Vorteil, um die linienartigen Diskontinuitäten eine Netzverfeinerung vorzunehmen.

Da durch die Rechnungen zur Verifikation der Methode und zum Austesten der Netzanforderungen keine neuen Singularitätsordnungen ermittelt wurden, wird hier auf die Darstellung dieser Beispiele verzichtet. Bezüglich der Genauigkeit der Rechnungen konnte allgemein bei diesen Beispielen mindestens bis auf zwei Nachkommastellen eine sehr gute Übereinstimmung mit Referenzwerten ermittelt werden. Weiterführende Vergleiche zur Untersuchung der Genauigkeit sind begrenzt sinnvoll, da die überwiegend numerisch ermittelten Referenzwerte ebenfalls nicht analytisch exakt sind. Zudem sind weitere Nachkommastellen für die Analyse der Spannungssingularität nur begrenzt relevant, da das Abklingverhalten im Wesentlichen durch die erste und zweite Nachkommastelle bestimmt wird. Im Rahmen der Modellbildung wurde daher auch keine gezielte Steigerung der Genauigkeit auf weitere Nachkommastellen angestrebt. Da für Analysen von unbekannten Konfigurationen im Weiteren qualitativ gleichwertige Netze wie für die betrachteten Referenzbeispiele verwendet wurden, ist davon auszugehen, dass die Ergebnisse als ähnlich genau und zuverlässig eingestuft werden können.

3.2 Modelle für homogene Konfigurationen

Grundsätzlich sind Konfigurationen interessant, in denen einerseits geometrische Diskontinuitäten und andererseits materielle Diskontinuitäten auftreten. Hier werden zuerst Konfigurationen aus homogenem isotropem Material betrachtet. Naturgemäß treten in solchen Situationen nur geometrische Diskontinuitäten auf. Teilweise wurden die Ergebnisse der folgenden Abschnitte und aus Kapitel 5 bereits in Konferenzbeiträgen (vgl. [65], [66] und [67]) vorgestellt.

3.2.1 Zweidimensionaler Riss- und Kerbgrund

Eine wichtige Konfiguration im zweidimensionalen Raum mit rein linear-elastischem Materialverhalten ist ein Rissgrund sowie ein Kerbgrund mit variablem Kerböffnungswinkel γ in homogenem isotropem Material (siehe Abbildung 3). Auch wenn ein Riss formal nur einen Fall des Kerbs mit Öffnungswinkel 0° darstellt, hat er mechanisch gesehen eine besondere Bedeutung und wird daher zum Teil gesondert benannt. Die Ergebnisse für diese Konfigurationen sind selbstverständlich bekannt und dienen im Rahmen der

Untersuchung zur Verifizierung der Methode und der Implementierung. Die Singularitätsordnungen für den Rissgrund und den Kerbgrund werden hier jedoch noch einmal aufgeführt, da sie bei der Auswertung der dreidimensionalen Situationen zum Vergleich herangezogen werden.

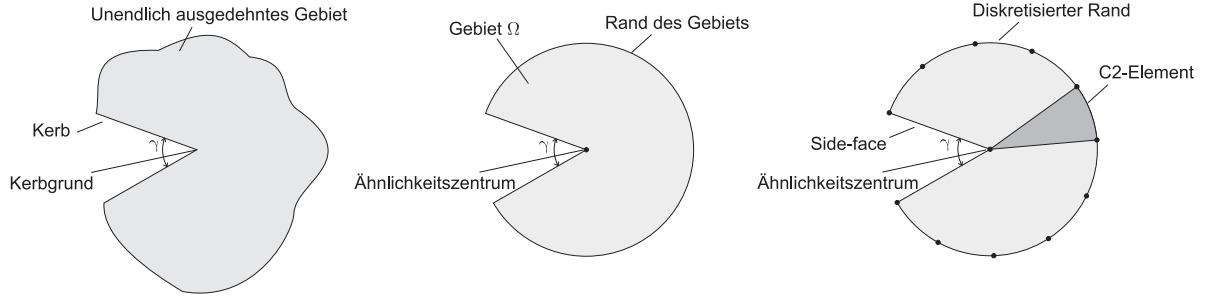


Abbildung 3: Zweidimensionaler Kerb in homogenem Material mit Kerböffnungswinkel γ und Ähnlichkeitszentrum im Kerbgrund. Links: Ausgangskonfiguration. Mitte: Gebiet für die RFEM-Analyse. Rechts: Diskretisierung mit C2-Elementen.

Die Diskretisierung für den zweidimensionalen Kerb ist in Abbildung 3 dargestellt. Im Rahmen der Methode wird zuerst für einen Kerb in einem unendlich ausgedehnten Kontinuum aus dem linken Teil der Abbildung ein Gebiet Ω ausgewählt, das keine Hinterschneidungen aufweist. Der Rand des Gebiets ist somit in allen Punkten vom Ähnlichkeitszentrum, das in den Kerbgrund gelegt wird, sichtbar. Die Größe des Gebiets um das Zentrum der Singularität ist beliebig wählbar. Für die Ermittlung der Singularitätsordnungen ist es nur wichtig, das Ähnlichkeitszentrum ins Zentrum der Singularität zu legen. Die Geometrie des Gebiets ist unter Einhaltung der „Sichtbarkeit“ des Randes vom Ähnlichkeitszentrum aus ebenso frei wählbar. Der Einfachheit halber wurden im Rahmen dieser Arbeit meist kreisförmige beziehungsweise kugelförmige Gebiete gewählt. Nach Wahl des Gebiets wird die Konfiguration mit C2-Kontinuumselementen diskretisiert. Wie im rechten Teil der Abbildung dargestellt, entspricht dies letztendlich einer Diskretisierung des Randes mit Linienelementen, das RFEM-Element bildet jedoch das Gebietsinnere durch die Skalierung ebenso ab. Dies ist für ein Element in der Abbildung durch die Schattierung angedeutet. Es wird auch ersichtlich, dass Bereiche wie Riss- oder Kerbflanken nicht diskretisiert werden. Dies gilt innerhalb der Methode allgemein für sogenannte „side-faces“, also Flächen, die ins Ähnlichkeitszentrum hineinlaufen, da auf diesen „side-faces“ starke Randbedingungen vorgegeben werden (vgl. z.B. [26]).

Um die Abhängigkeit der Singularitätsordnung vom Kerböffnungswinkel abzubilden wurden neben dem Riss drei weitere Kerböffnungswinkel (30° , 60° , 90°) ausgewählt. Für das elastische isotrope Material wurde ein Elastizitätsmodul von $E = 210.000 \text{ MPa}$ verwen-

det und die Querkontraktionszahl ν für jeden Kerböffnungswinkel im Bereich 0 bis 0,49 variiert. Die Ergebnisse für die zweidimensionalen Diskontinuitätslinien im Kerbgrund für linear-elastisches Materialverhalten sind in Abbildung 4 dargestellt.

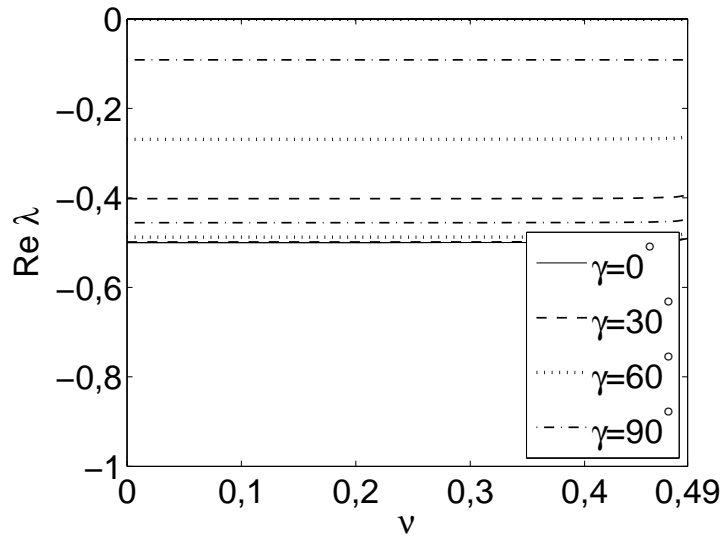


Abbildung 4: Singularitätsordnungen im zweidimensionalen Kerbgrund eines homogenen isotropen Festkörperkontinuums mit Elastizitätsmodul $E = 210.000$ MPa für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν .

Allgemein ist die Ordnung einer Spannungssingularität wie in Abschnitt 2.3 beschrieben eine komplexe Zahl ($Re\lambda$, $Im\lambda$). Für homogenes isotropes Materialverhalten treten jedoch nur rein reelle Eigenwerte auf. Daher ist für den Kerbgrund nur der Realteil abgebildet. Da der Wertebereich $Re\lambda > 0$ im Hinblick auf singuläre Spannungen nicht von Interesse ist, wird dieser hier und im Folgenden nicht abgebildet, auch wenn Eigenwerte in diesem Bereich vorliegen. In diesem Beispiel liegen für jeden betrachteten Kerböffnungswinkel jeweils zwei Eigenwerte im abgebildeten Wertebereich, ein Maß für die Singularität liefert hier jeweils die stärkere Singularitätsordnung, also der betragsmäßig größte Wert. Wie zu erwarten ergibt sich für den Rissgrund die bekannte Rissspitzensingularität mit einer Singularitätsordnung von $-0,5$ und für größere Kerböffnungswinkel nehmen die Singularitätsordnungen ab. Es ist zu erkennen, dass die Singularitäten insgesamt nicht von der Querkontraktionszahl abhängen, was ebenfalls zu erwarten ist.

3.2.2 Dreidimensionale Interaktion von vier Kerben

Als zugehöriges dreidimensionales Beispiel wurde die dreidimensionale Interaktion von vier geraden Kerben (Abb. 5) unter jeweils rechtem Winkel untersucht. Hier treten in homogenem Material ausschließlich geometrische Diskontinuitäten auf. Wie in Abbildung 5 dargestellt treffen in dieser Konfiguration vier linienartige zweidimensionale Diskontinuitäten – die mit Γ_1 gekennzeichneten Kerbgründe – in einem dreidimensionalen Interaktionspunkt aufeinander. Sinnvollerweise wird zur Berechnung der Singularitätsordnungen an dieser Stelle mit der Rand-Finite-Elemente-Methode das Ähnlichkeitszentrum in genau diesen Punkt gelegt.

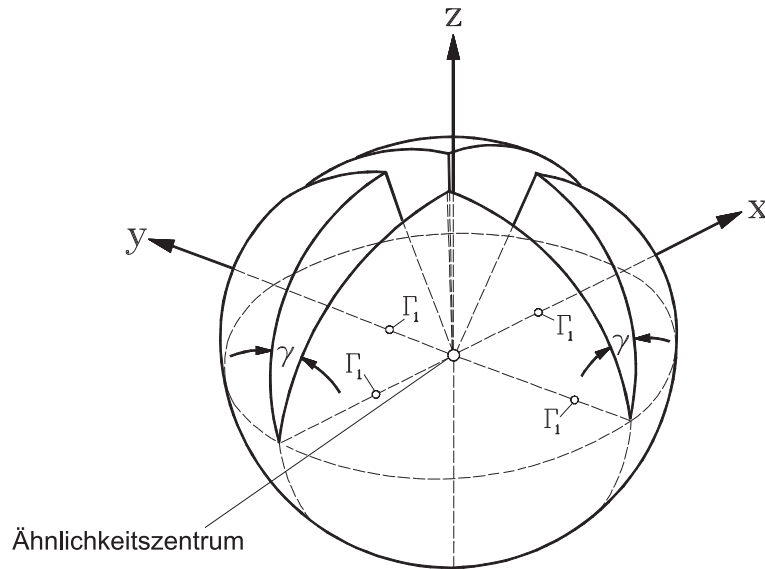


Abbildung 5: Vier gerade, rechtwinklig aufeinander stehende Kerben mit Kerböffnungswinkel γ in einem isotropen Festkörperkontinuum.

Wie für den zweidimensionalen Kerbgrund werden die Kerböffnungswinkel $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ für ein isotropes elastisches Material mit einem Elastizitätsmodul von $E = 210.000 \text{ MPa}$ und einer Querkontraktionszahl ν im Bereich von 0 bis 0,49 untersucht. Die Ergebnisse im dreidimensionalen Interaktionspunkt sind in den Abbildungen 7 und 8 dargestellt.

Bei der Untersuchung der dreidimensionalen Interaktion wurde deutlich, welche Vorteile die Rand-Finite-Elemente-Methode zur Ermittlung von Singularitätsordnungen besitzt. Die in Abbildungen 7 und 8 dargestellten Ergebnisse wurden mit Datenpunkten im Abstand von $\Delta\nu = 0,02$ berechnet. Dabei wurden für die einzelnen Winkel Rechenzeiten von 15-30 Minuten benötigt. In Abbildung 6 ist beispielhaft das Netz für

den Kerböffnungswinkel $\gamma = 30^\circ$ dargestellt. Auch hier ist nur der Rand ohne „side-faces“ diskretisiert. Wie in Abschnitt 3.2.1 erläutert ähneln auch hier die verwendeten C4-Kontinuumsэлеmente zunächst entsprechenden Schalenelementen in der Finite-Elemente-Methode, sie bilden jedoch wieder durch die Skalierung das Innere des Gebiets mit ab und sind daher Kontinuumsэлеmente. Vergleichsweise ließe sich so ein Verlauf mit der Finite-Elemente-Methode zum einen nur mit einem sehr viel feineren Netz ermitteln und damit verbunden einem höheren Rechenzeitaufwand, zum anderen wäre es dort sehr mühsam, aus den Simulationsergebnissen überhaupt die Singularitätsordnungen zu bestimmen. Ein enormer Vorteil der Methode ist, dass alle Singularitätsordnungen einer Konfiguration in einem einzigen Rechenschritt ermittelt werden können. Dies gilt auch, wenn wie in diesem Beispiel eine große Anzahl an Singularitätsordnungen vorliegt.

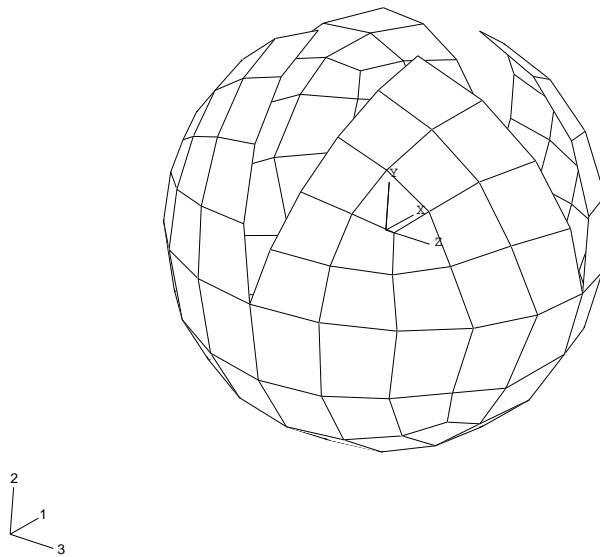


Abbildung 6: RFEM-Diskretisierung mit C4-Elementen für vier gerade, rechtwinklig aufeinander stehende Kerben mit Kerböffnungswinkel $\gamma = 30^\circ$.

Die Abbildungen 7 und 8 zeigen, dass die Singularitätsordnungen auch im dreidimensionalen Interaktionspunkt mit sich öffnendem Kerbwinkel abnehmen. Der qualitative Verlauf ist für die Kerbwinkel 30° bis 90° sehr ähnlich, für den Riss stellt er sich etwas komplexer dar. Es sei angemerkt, dass für alle Fälle weitere Eigenwerte auftreten, die außerhalb des für die Spannungssingularitäten interessanten Bereichs liegen und daher

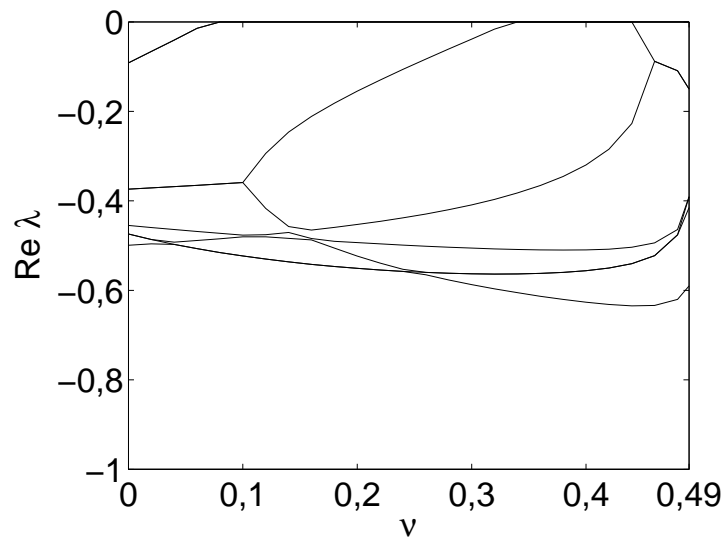
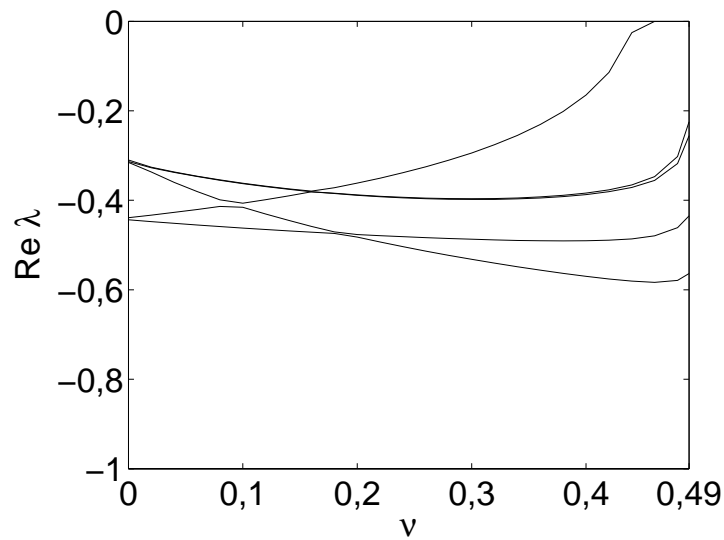
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=0^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=30^\circ$

Abbildung 7: Singularitätsordnungen für vier gerade, rechtwinklig aufeinander stehende Kerben mit Kerböffnungswinkel γ in einem homogenen isotropen Festkörperkontinuum mit Elastizitätsmodul $E = 210.000 \text{ MPa}$ in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν .

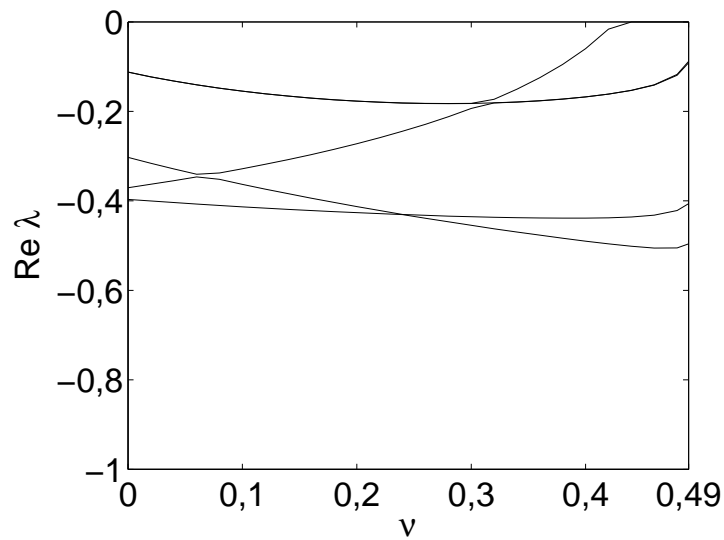
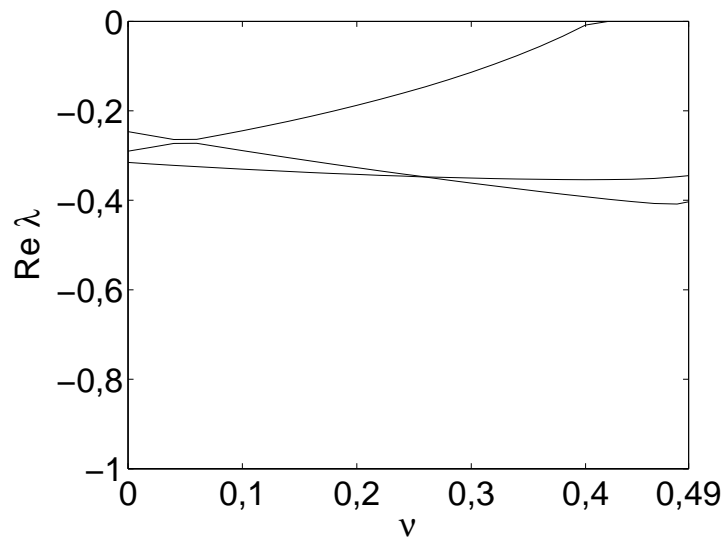
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=60^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=90^\circ$

Abbildung 8: Singularitätsordnungen für vier gerade, rechtwinklig aufeinander stehende Kerben mit Kerböffnungswinkel γ in einem homogenen isotropen Festkörperkontinuum mit Elastizitätsmodul $E = 210.000 \text{ MPa}$ in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν .

wie bereits erwähnt hier nicht abgebildet werden. Die Ähnlichkeit des gesamten Verlaufs für die unterschiedlichen Kerbwinkel lässt sich teilweise durch Betrachtung aller Eigenwerte besser erkennen, da der Fokus dieser Arbeit auf der Ermittlung der Eigenwerte, die zu singulären Spannungen führen, liegt, soll dies hier aber nicht weiter untersucht werden. Bereits im untersuchten Bereich liegt jedoch eine große Anzahl an Singularitätsexponenten. Wie aus der Darstellung (2.22) ersichtlich ist, führt bereits ein Eigenwert im relevanten Bereich zu singulären Spannungen, da der entsprechende Term der Reihendarstellung dominiert. Es ist jedoch bemerkenswert, dass für einzelne Konfigurationen gleich mehrere relevante Singularitätsordnungen vorliegen und somit mehrere Terme in der Reihendarstellung zu singulären Werten führen. Im Vergleich mit den Ergebnissen für die Kerbgründe wird deutlich, dass im Interaktionspunkt ein sehr komplexes Geschehen stattfindet, auf das sich von den ebenen Ergebnissen heraus offenbar nicht einfach schließen lässt (vgl. Abb. 4). Außer abnehmenden Werten für größere Öffnungswinkel gibt es keine Regelmäßigkeit, die den Verläufen für den Kerbgrund und für den Interaktionspunkt auf den ersten Blick gemein ist. Es ist somit umso wichtiger, eine effiziente Methode zur Analyse von dreidimensionalen Situationen zur Verfügung zu haben.

Bei genauer Betrachtung der Ergebnisse für vier Risse ist zu erkennen, dass sich ein Eigenwert ungefähr an der Stelle $\nu = 0,1$ aufspaltet. Der Eigenwert ist demnach für kleine Querkontraktionszahlen komplex und teilt sich dann in zwei reelle Werte auf. Entsprechend tritt im linken Bereich ein Imaginärteil auf, auf dessen Darstellung jedoch wieder verzichtet wird. Für alle vier Ergebnisse treten in den Diagrammen Schnittpunkte der einzelnen Singularitätsordnungen oder Stellen, an denen sich die Kurven beinahe schneiden, auf. Solche Punkte sind im Gegensatz zu Verzweigungspunkten nicht von besonderem Interesse, da die einzelnen Singularitätsordnungen nicht miteinander interagieren. Es wäre somit auch möglich, die Singularitätsordnungen in unterschiedlichen Diagrammen einzeln aufzutragen, um die genauen Verläufe der einzelnen Singularitätsordnungen zu betrachten. Hier liegt jedoch das Augenmerk darauf, einen Überblick über die Anzahl und Qualität der auftretenden Singularitätsordnungen für eine Konfiguration zu gewinnen.

Im Vergleich mit den ebenen Ergebnissen (vgl. Abb. 4) fällt auf, dass die Singularitätsordnungen am dreidimensionalen Interaktionspunkt der vier Kerben für alle Kerböffnungswinkel eine starke Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl ν aufweisen. Für die Kerböffnungswinkel 0° und 30° treten zudem Singularitätsordnungen auf, deren Betrag größer als der bekannte Wert von $-0,5$ einer Risspitze in homogenem isotropen Material ist. Somit liegen Hypersingularitäten vor. Es ist bemerkenswert, dass bereits in einer recht einfachen homogenen isotropen Konfiguration solche Werte auftreten.

3.3 Modelle für Multimaterialkonfigurationen

Als nächstes wurden Konfigurationen mit Gebieten unterschiedlicher Materialeigenschaften für linear-elastisches Materialverhalten untersucht. Hier treten nun sowohl geometrische als auch materielle Diskontinuitäten auf.

3.3.1 Interfacekerb am freien Rand

Eine dreidimensionale Situation, in der sowohl eine materielle als auch eine geometrische Diskontinuität auftritt, ist ein Oberflächenkerb in einem gebietsweise homogenen Halbraum aus zwei isotropen oder orthotropen Teilmaterialien mit dem Kerbgrund im Interface wie in Abbildung 9 dargestellt. Hier treffen zwei zweidimensionale Diskontinuitäten, nämlich der Riss- bzw. Kerbgrund im Interface zwischen den beiden Materialien (Diskontinuitätslinie Γ_1 in Abb. 9) sowie ein Interface zwischen isotropen Teilmaterialien am freien Rand (Diskontinuitätslinie Γ_2 in Abb. 9), in einem dreidimensionalen Interaktionspunkt aufeinander. Im Hinblick auf potentielle Zusammenhänge der Singularitätsordnungen wurden wieder zuerst die beiden zweidimensionalen Diskontinuitäten und anschließend der Interaktionspunkt für verschiedene Kerböffnungswinkel und Materialkombinationen untersucht.

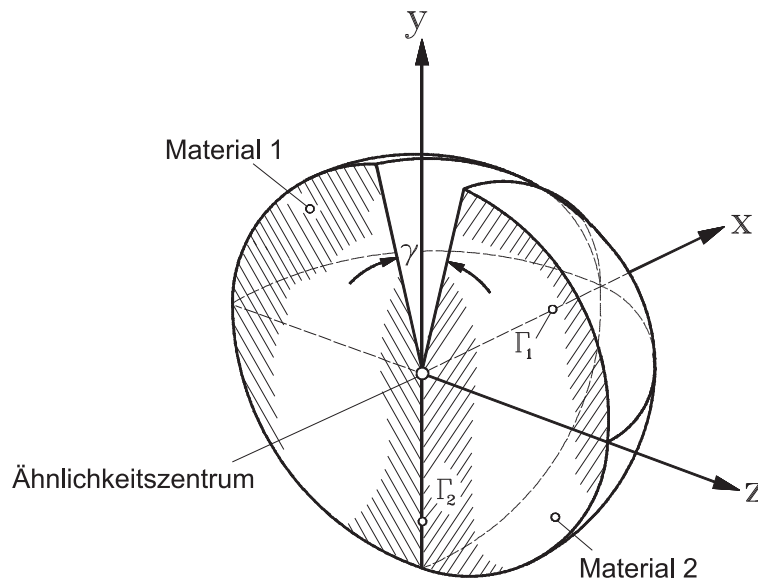


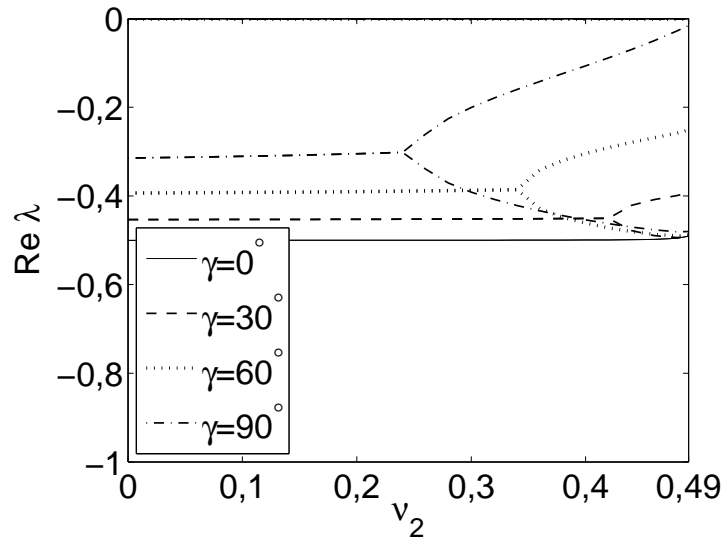
Abbildung 9: Dreidimensionaler Oberflächenkerb in einem gebietsweise homogenen Halbraum aus zwei Teilmaterialien mit dem Kerbgrund im Interface.

Zweidimensionaler Kerbgrund im Interface Γ_1

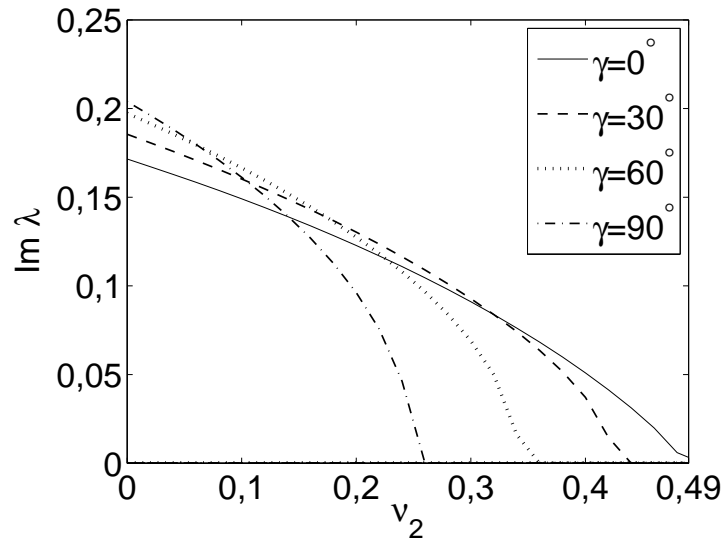
Zur Untersuchung des zweidimensionalen Kerbgrunds im Interface wurden für Material 1 die festen Werte $E_1 = 210.000$ MPa für den Elastizitätsmodul und $\nu_1 = 0,3$ für die Querkontraktionszahl gewählt, für Material 2 der Elastizitätsmodul $E_2 = 2.100$ MPa und eine variable Querkontraktionszahl. Die berechneten Singularitätsordnungen für ausgewählte Kerböffnungswinkel γ sind in Abbildung 10 dargestellt.

Da nun komplexwertige Eigenwerte für alle Kerbwinkel auftreten, sind sowohl Real- als auch Imaginärteil der Singularitätsordnung dargestellt. Hierbei ist zu erkennen, dass sich der Realteil jeweils an einem Punkt aufspaltet. Vor dem Verzweigungspunkt ist der Eigenwert komplexwertig und es liegen Imaginärteile vor. Nach dem Verzweigungspunkt verschwinden die Imaginärteile und es treten zwei reellwertige Eigenwerte auf. An dem Übergangspunkt selbst treten – wie in Abschnitt 2.3 erläutert – logarithmische Singularitäten auf. Der qualitative Verlauf der Singularitätsordnungen ist für alle betrachteten Kerböffnungswinkel sowohl für die Real- als auch für die Imaginärteile ähnlich. Der Übergang der komplexwertigen Ordnung in zwei reelle Eigenwerte liegt jedoch für die unterschiedlichen Kerbwinkel bei verschiedenen Werten für die Querkontraktionszahl von Material 2.

Für den Oberflächenriss ($\gamma = 0^\circ$) tritt als Realteil wieder die Rissspitzensingularität auf. Für die anderen Kerböffnungswinkel nehmen die Realteile der Singularitätsordnung für kleine Querkontraktionszahlen wieder mit zunehmendem Kerböffnungswinkel ab. Dies entspricht der Erwartung, dass ein größerer Kerböffnungswinkel weniger kritisch im Hinblick auf Spannungssingularitäten ist. Die Realteile nähern sich aber alle für höhere Querkontraktionszahlen mit einem Ast der Kurve der Rissspitzensingularität an. Bei den größeren Kerböffnungswinkeln variieren die Singularitätsordnungen also über den betrachteten Bereich von ν_2 wesentlich stärker als für den Riss. Im Vergleich mit den Ergebnissen für die gleiche Geometrie in homogenem Material aus Abschnitt 3.2.1 (vgl. Abb. 4) fällt auf, dass für niedrige Querkontraktionszahlen der betragsmäßig größte Realteil für jeden Kerbwinkel jeweils kleiner ist als für den entsprechenden Fall bei homogenem Material. Für größere Querkontraktionszahlen sind die Singularitätsordnungen in der Bimaterial-Konfiguration jedoch stärker. Singularitätsordnungen hängen also nicht zuletzt von der Wahl der Materialeigenschaften ab.



Realteile der Singularitätsordnungen



Imaginärteile der Singularitätsordnungen

Abbildung 10: Singularitätsordnungen für einen Kerbgrund im Interface für verschiedene Kerböffnungswinkel γ für gebietsweise isotropes Material mit $E_1 = 210.000$ MPa, $\nu_1 = 0,3$ und $E_2 = 2.100$ MPa in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_2 .

Zweidimensionales Interface am freien Rand Γ_2

Für das Interface am freien Rand wurden die Rechnungen mit einem Elastizitätsmodul $E_1 = 210.000$ MPa und der Querkontraktionszahl $\nu_1 = 0,3$ für Material 1 durchgeführt. Für Material 2 wurde für verschiedene Werte des Elastizitätsmoduls die Querkontraktionszahl ν_2 variiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 11 dargestellt. Die auftretenden Singularitätsordnungen sind hierbei rein reell. Für alle Materialwerte nehmen die Singularitätsordnungen mit wachsender Querkontraktionszahl zu. Die auftretenden Singularitäten sind von den betrachteten Materialkombinationen für das größte Verhältnis $E_1 : E_2$ am stärksten. Ein großer Unterschied in den Materialeigenschaften führt somit auch in dieser Konfiguration zu einer potentiell kritischen Situation, die bei einer Wahl ähnlicher Materialien nicht auftritt.

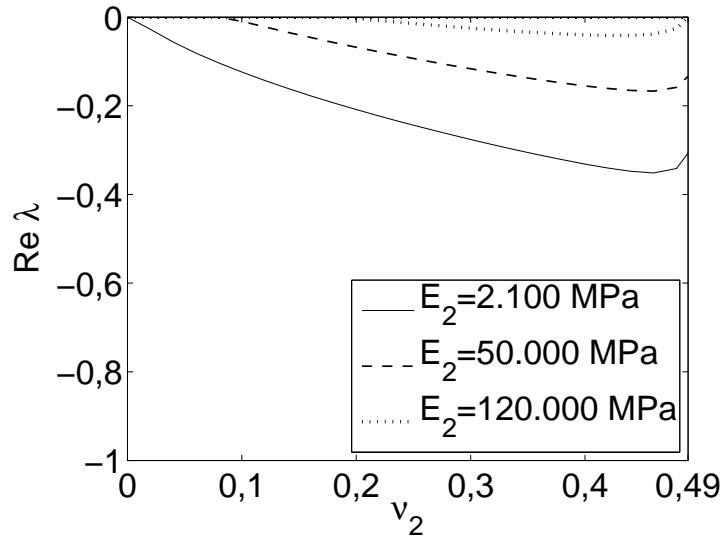


Abbildung 11: Singularitätsordnungen für ein Interface zwischen zwei isotropen Materialien am freien Rand mit $E_1 = 210.000$ MPa und $\nu_1 = 0,3$ für verschiedene Werte von E_2 in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_2 .

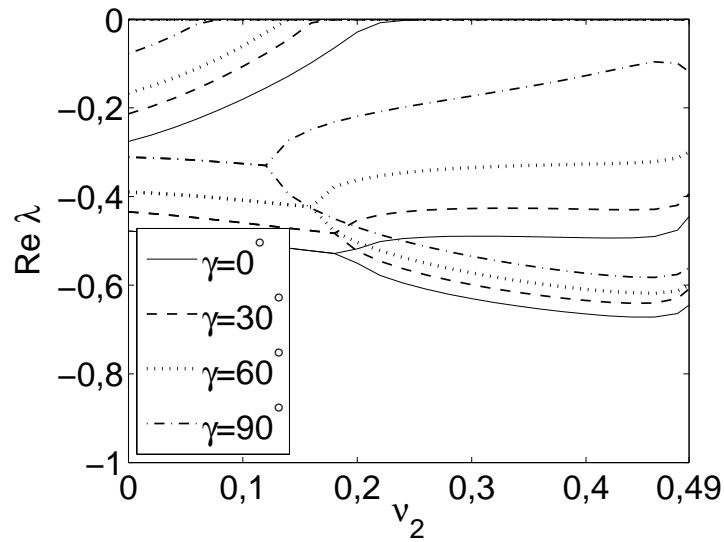
Dreidimensionale Interaktion

Zur Analyse der dreidimensionalen Interaktion der Diskontinuitätslinien Γ_1 und Γ_2 bei dem geraden Oberflächenkerb in einem gebietsweise homogenen Halbraum aus zwei Teilmaterialien mit Kerbgrund im Interface aus Abbildung 9 wird das Ähnlichkeitszentrum

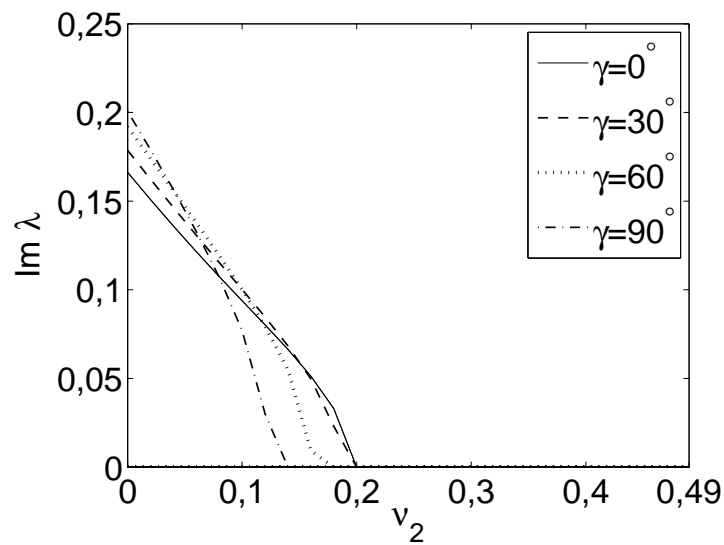
genau in den Interaktionspunkt zwischen Kerbgrund und Interface am freien Rand gelegt. Die Konfiguration wird zunächst ebenso wie die zweidimensionalen Situationen für isotrope Materialien für die gleichen Werte des Kerböffnungswinkels γ (also 0° , 30° , 60° , 90°) untersucht. Wie für den Kerbgrund im Interface werden für Material 1 die festen Werte $E_1 = 210.000$ MPa für den Elastizitätsmodul und $\nu_1 = 0,3$ für die Querkontraktionszahl gewählt, für Material 2 der Elastizitätsmodul $E_2 = 2.100$ MPa und eine variable Querkontraktionszahl. Die Ergebnisse hierfür sind in Abbildung 12 dargestellt.

Für alle Kerböffnungswinkel tritt zum einen ein komplexer Eigenwert auf, der sich in zwei reellwertige Eigenwerte aufteilt, sowie zum anderen im Bereich niedriger Querkontraktionszahlen ein weiterer reeller Eigenwert, der jedoch betragsmäßig kleiner und damit weniger interessant ist. Im Vergleich mit den Ergebnissen für den Kerbgrund in Abbildung 10 zeigt sich zunächst für alle Kerböffnungswinkel ein ähnlicher Verlauf mit jeweils einem komplexwertigen Eigenwert im Bereich niedriger Querkontraktionszahlen, der sich ab einem bestimmten Wert für die Querkontraktionszahl ν_2 in zwei reellwertige aufteilt. Die Verzweigungspunkte treten jedoch für alle Winkel bei kleineren Querkontraktionszahlen auf als beim Kerbgrund und liegen für alle Kerböffnungswinkel dichter beieinander. Die Singularitätsordnungen befinden sich für niedrige ν -Werte in einem ähnlichen Bereich wie beim Kerbgrund, für hohe ν -Werte sind sie deutlich stärker als im Kerbgrund und im Interface am freien Rand. Die auftretenden Singularitätsordnungen variieren nun für alle Winkel um rund 0,2 über den gesamten ν -Bereich und nähern sich nicht wie beim Kerbgrund für große Querkontraktionszahlen alle einem gemeinsamen Wert an. Im Bereich hoher Querkontraktionszahlen treten insbesondere für alle Kerböffnungswinkel stärkere Singularitätsordnungen als für den Riss in homogenem Material auf.

Bei Betrachtung der Ergebnisse für den Interaktionspunkt (Abbildung 12) und der Ergebnisse für den Kerbgrund im Interface (Abbildung 10) und für das Interface am freien Rand (Abbildung 11) liegt ein Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der zwei linienartigen Diskontinuitäten mit denen des dreidimensionalen Interaktionspunkts deutlich näher als im Fall der vier Kerben mit homogenem isotropem Materialverhalten (vgl. Abschnitt 3.2). Der qualitative Verlauf der unteren Realteile im Interaktionspunkt birgt eine gewisse Ähnlichkeit mit den Verläufen im Kerbgrund. Der leicht schräge Verlauf der unteren Realteile in Abbildung 12 könnte auf den Einfluss der Singularität des Interfaces am freien Rand zurückzuführen sein – auch dort nehmen die Eigenwerte mit wachsender Querkontraktionszahl zu. Allerdings liegen die unteren Kurven in Abbildung 12 fast parallel, wohingegen die Kurven in Abbildung 11 sich eher auffächern. Die genaue Lage der Verzweigungspunkte der Singularitätsordnungen im Interaktionspunkt lässt sich nicht aus den Ergebnissen für die zweidimensionalen Diskontinuitäten vorhersagen, glei-



Realeile der Singularitätsordnungen



Imaginärteile der Singularitätsordnungen

Abbildung 12: Singularitätsordnungen für einen Oberflächenkerb in einem gebietsweise homogenen Halbraum aus zwei isotropen Teilmaterialien mit dem Kerbgrund im Interface für verschiedene Kerböffnungswinkel γ mit $E_1 = 210.000$ MPa, $\nu_1 = 0,3$ und $E_2 = 2.100$ MPa in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_2 .

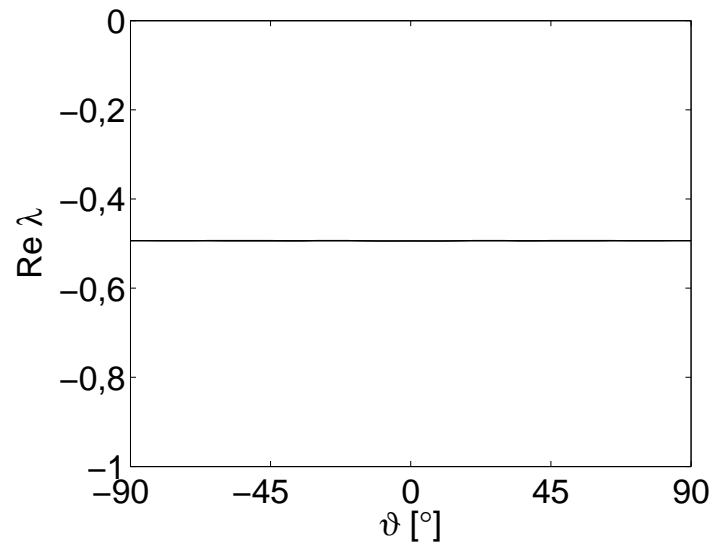
ches gilt für den stärkeren Maximalwert der Singularitätsordnung im Interaktionspunkt. Der Vergleich der Ergebnisse legt insgesamt also zwar nahe, dass ein Zusammenhang der Singularitätsordnungen am Interaktionspunkt mit den Singularitätsordnungen der aufeinandertreffenden linienartigen Diskontinuitäten besteht, deutet jedoch auch darauf hin, dass eine exakte Herleitung des Verhaltens am Interaktionspunkt durch Betrachtung der zweidimensionalen Ergebnisse allgemein nicht möglich ist und für solche Situationen eine eigene dreidimensionale Untersuchung durchgeführt werden muss.

$E_1 = 135.000 \text{ MPa}$	$\nu_{12} = 0, 27$	$G_{12} = 5.000 \text{ MPa}$
$E_2 = 10.000 \text{ MPa}$	$\nu_{13} = 0, 27$	$G_{13} = 5.000 \text{ MPa}$
$E_3 = 10.000 \text{ MPa}$	$\nu_{23} = 0, 27$	$G_{23} = 3.972 \text{ MPa}$

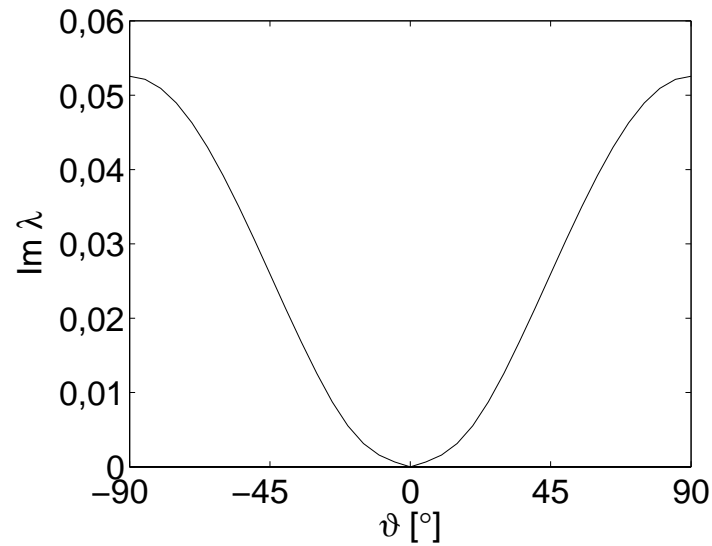
Tabelle 5: Materialdaten von T300/Epoxy.

Die gleiche Konfiguration des Oberflächenkerbs in einem gebietsweise homogenen Halbraum aus zwei Teilmaterialien mit dem Kerbgrund im Interface wurde auch für gebietsweise homogenes orthotropes Materialverhalten untersucht. Für beide Teilmaterialien wurden die mechanischen Eigenschaften von T300/Epoxy, eines unidirektionalen CFK-Werkstoffs, verwendet. Die Materialwerte in Ingenieurskonstanten sind in Tabelle 5 angegeben. Zuerst wurde nur der Kerboffnungswinkel $\gamma = 0^\circ$, also der Oberflächenriss, mit einem Lagenaufbau von $[0^\circ/\vartheta]$ betrachtet. Für den Winkel 0° liegt hierbei die 1-Richtung der Fasern des Materials in Richtung der x-Achse in Abbildung 9, die Richtungen 2 und 3 entsprechen der y- und z-Achse. Der Winkel ϑ beschreibt eine Rotation des orthotropen Materials in der x-y-Ebene im positiven Drehwinkel (entgegen dem Uhrzeigersinn). Wie im isotropen Fall wurden die Singularitätsordnungen für die zweidimensionalen Diskontinuitäten untersucht und die Ergebnisse mit denen am dreidimensionalen Interaktionspunkt verglichen. Die Ergebnisse für die Real- und Imaginärteile für den zweidimensionalen Rissgrund, den zweidimensionalen Interface am freien Rand und den dreidimensionalen Interaktionspunkt sind in den Abbildungen 13-15 dargestellt.

Es lässt sich kein direkter Zusammenhang zwischen den Singularitätsordnungen der zweidimensionalen Singularitäten und denen am Interaktionspunkt erkennen. Der Rissgrund liefert die bekannte Singularität, der reine Interface am freien Rand führt für alle Werte von ϑ nur zu einer sehr schwachen Singularität. Die größte Singularitätsordnung am Interaktionspunkt liegt jedoch mit ungefähr $-0,6$ betragsmäßig über der Rissspitzensingularität von $-0,5$. Die Mischform ist somit kritischer als die aufeinandertreffenden Diskontinuitäten alleine. Für den Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ treten für bestimmte Winkel komplexwertige Eigenwerte auf. Die Beträge der Imaginärteile liegen jedoch in einem Bereich, der numerisch mit Vorsicht betrachtet werden sollte. Aus dem Realteil ist

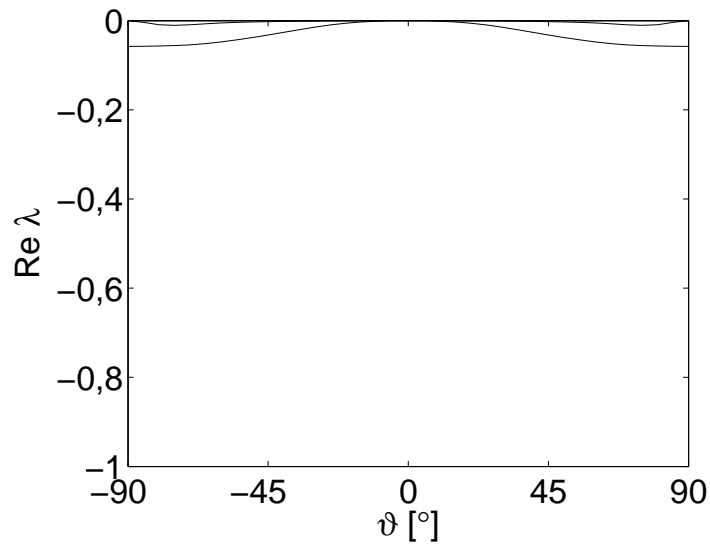


Realteile der Singularitätsordnungen

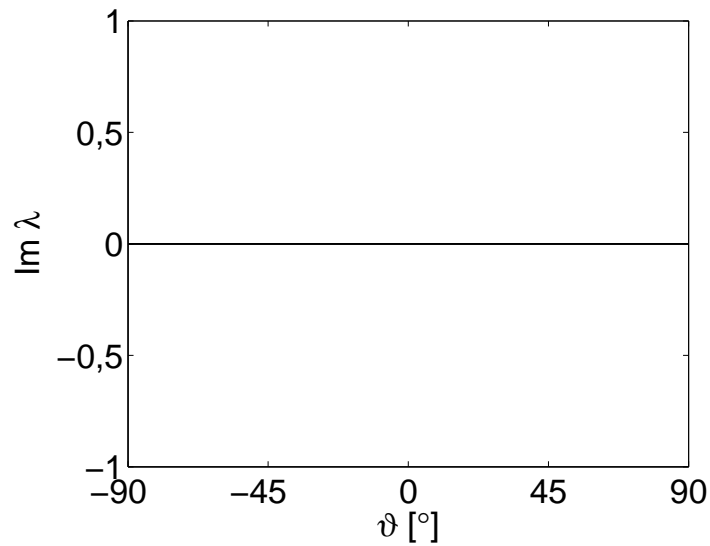


Imaginärteile der Singularitätsordnungen

Abbildung 13: Singularitätsordnungen für den Rissgrund im Interface für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

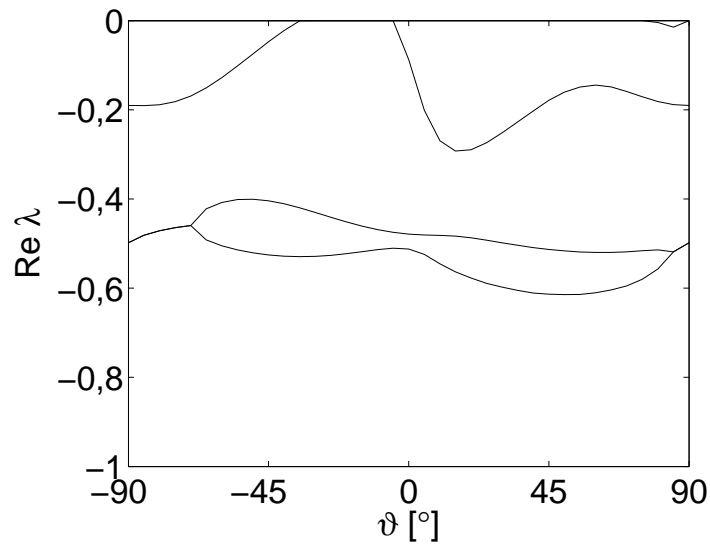


Realteile der Singularitätsordnungen

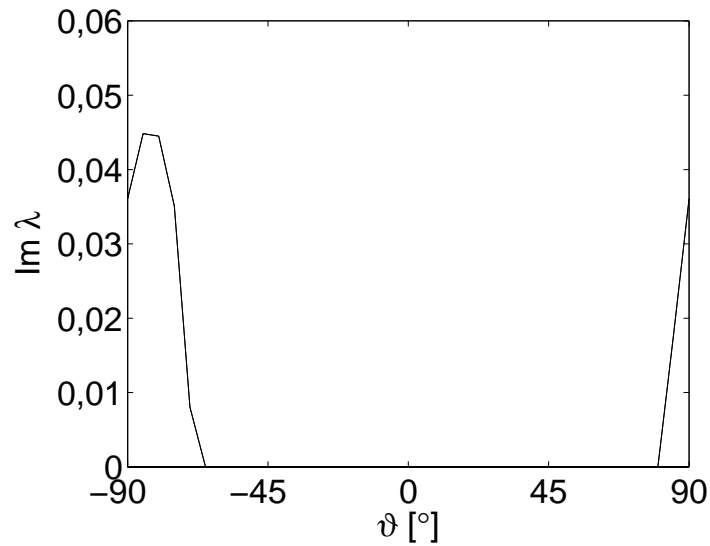


Imaginärteile der Singularitätsordnungen

Abbildung 14: Singularitätsordnungen für das Interface am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .



Realeile der Singularitätsordnungen



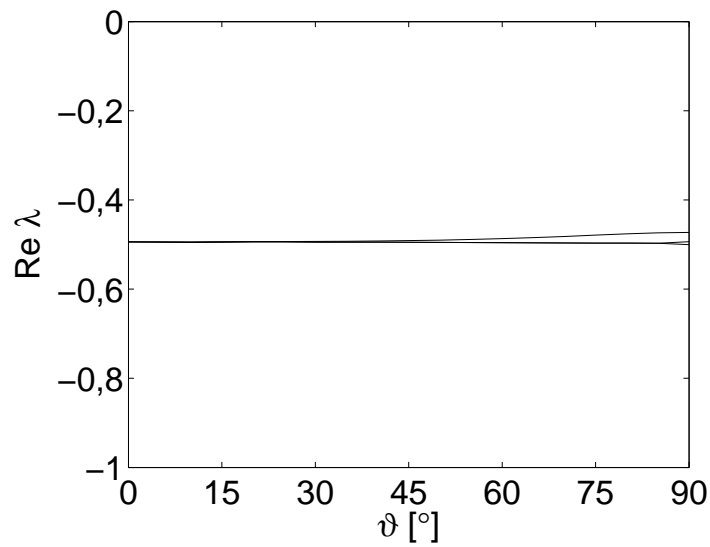
Imaginärteile der Singularitätsordnungen

Abbildung 15: Singularitätsordnungen für den Interaktionspunkt des Interfacerisses am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

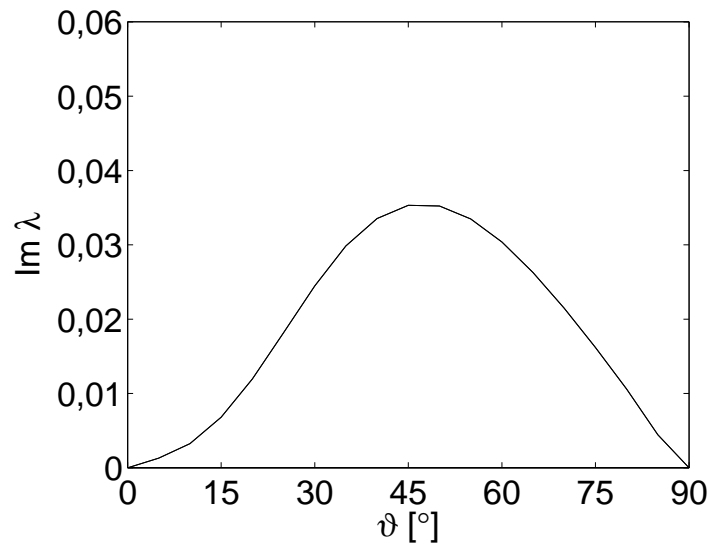
aber klar erkennbar, dass teilweise Imaginärteile und damit oszillierende Singularitäten vorliegen. Es sei angemerkt, dass die Winkel 90° und -90° natürlich die selben Ergebnisse liefern. Die Singularitätsordnungen für betragsmäßig gleiche Lagenwinkel sind für Material 2 jedoch nicht symmetrisch. Dies mag auf den ersten Blick erstaunen, da bei Laminaten bezüglich der Lagenwinkel oft Symmetrien vorliegen. Da die untersuchte Situation (vgl. Abbildung 9) jedoch durch den vorgegebenen Riss und das Interface und Festhalten des Lagenwinkels von Material 1 unter reiner Variation des Lagenwinkels ϑ von Schicht 2 auch nicht symmetrisch ist, gibt es keinen zwingenden Grund, wieso die Ergebnisse bezüglich des Lagenwinkels ϑ symmetrisch sein sollten. Insgesamt führen unterschiedliche Lagenaufbauten für gleiche Materialeigenschaften zu unterschiedlichen Singularitätsordnungen. Somit muss der Lagenaufbau stets berücksichtigt werden. Vergleicht man die Ergebnisse mit denen des Kerbs im Interface zwischen zwei isotropen Materialien (Abbildung 12), so lässt sich als Gemeinsamkeit das Auftreten einer stärkeren Singularitätsordnung, die teilweise komplex und teilweise reell ist, und einer schwächeren Singularitätsordnungen in annähernd ähnlichen Wertebereichen erkennen.

Die gleichen Untersuchungen wurden für den Risswinkel für einen Lagenaufbau von $[\pm\vartheta]$ durchgeführt. Die Ergebnisse, jeweils wieder für den zweidimensionalen Rissgrund, den zweidimensionalen Interface am freien Rand und den dreidimensionalen Interaktionspunkt, sind in den Abbildungen 16-18 dargestellt. Auch hier besteht kein direkt ersichtlicher Zusammenhang zwischen den Singularitätsordnungen der zweidimensionalen Singularitäten und denen am Interaktionspunkt. Die Rissspitzensingularität und eine sehr schwache Singularitätsordnung für das Interface am freien Rand erlauben keine Rückschlüsse auf das Geschehen am dreidimensionalen Interaktionspunkt, bei dem wieder eine stärkere Singularitätsordnung als $-0,5$ auftritt. In allen drei Fällen sind die Werte rein reell.

Weiter wurden für die gleiche Situation mit orthotropem Materialverhalten unterschiedliche Kerböffnungswinkel γ untersucht. Die Ergebnisse jeweils für die Realteile am dreidimensionalen Interaktionspunkt für die Kerböffnungswinkel $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ sind für den Lagenaufbau von $[0^\circ/\vartheta]$ in Abbildungen 19 und 20 und für den Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ in Abbildungen 21 und 22 dargestellt. Da aus den Realteilen zu erkennen ist, ob Imaginärteile auftreten oder nicht, wird hier auf die Abbildung der Imaginärteile verzichtet. Qualitativ sind die Verläufe jeweils für unterschiedliche Kerböffnungswinkel ähnlich. Wie zu erwarten werden die Singularitätsordnungen mit zunehmendem Kerböffnungswinkel schwächer. Der Verlauf der Singularitätsordnungen ist mit zunehmendem Kerböffnungswinkel leicht entzerrt. Es fallen nach und nach weniger Eigenwerte in den relevanten Bereich. Die auftretenden Maximalwerte der Singularitätsordnungen für die unterschiedlichen Kerböffnungswinkel sind für die verschiedenen Lagenaufbauten jeweils ähnlich.

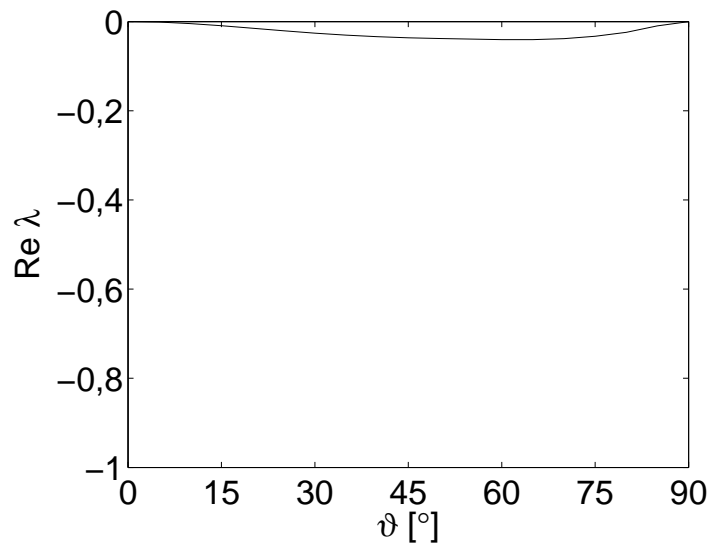


Realteile der Singularitätsordnungen

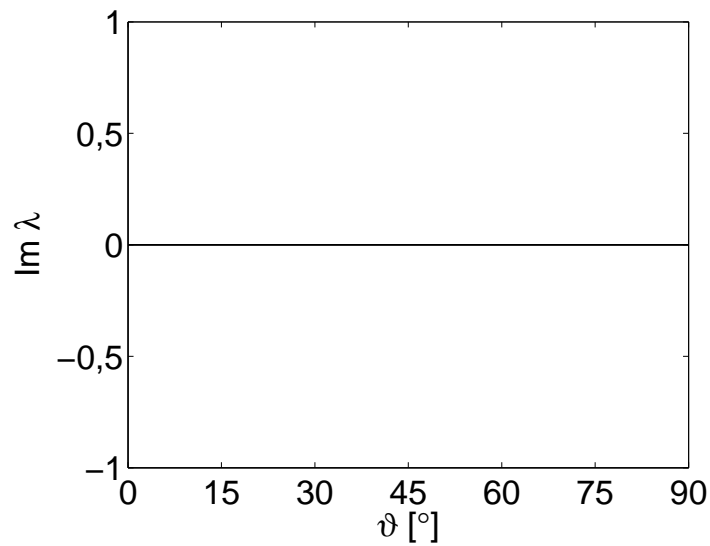


Imaginärteile der Singularitätsordnungen

Abbildung 16: Singularitätsordnungen für den Rissgrund im Interface für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .



Realteile der Singularitätsordnungen



Imaginärteile der Singularitätsordnungen

Abbildung 17: Singularitätsordnungen für das Interface am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

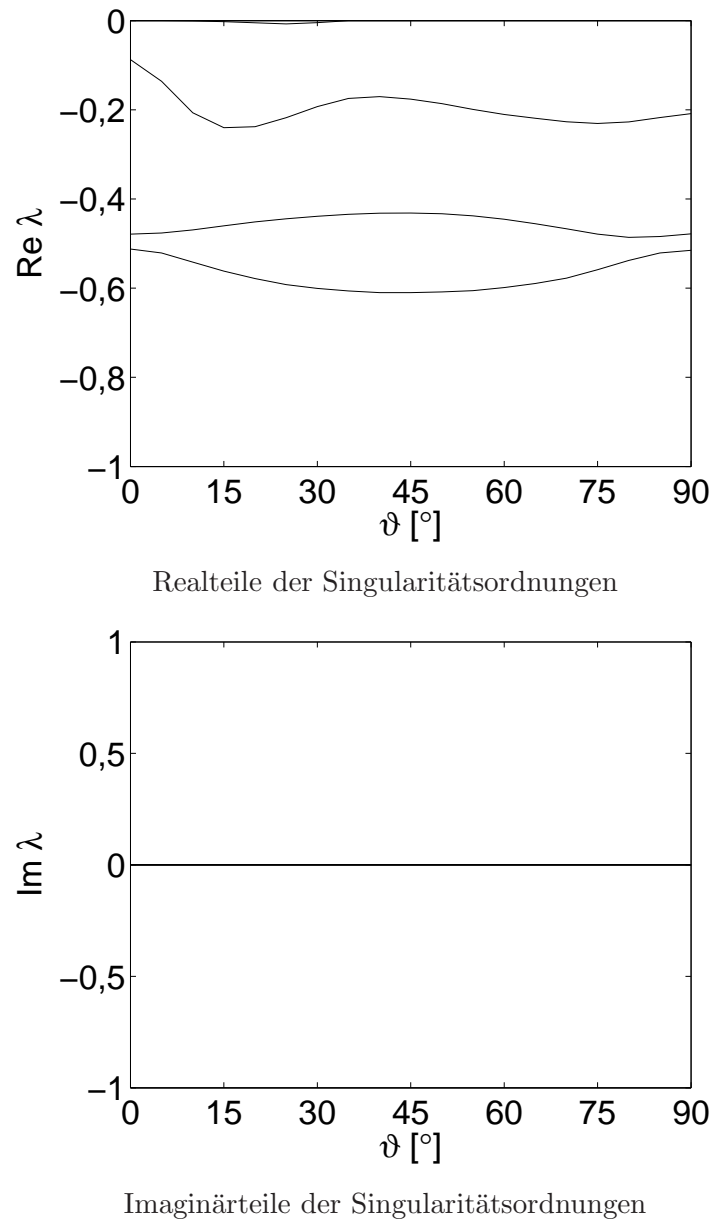


Abbildung 18: Singularitätsordnungen für den Interaktionspunkt des Interfacerisses am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

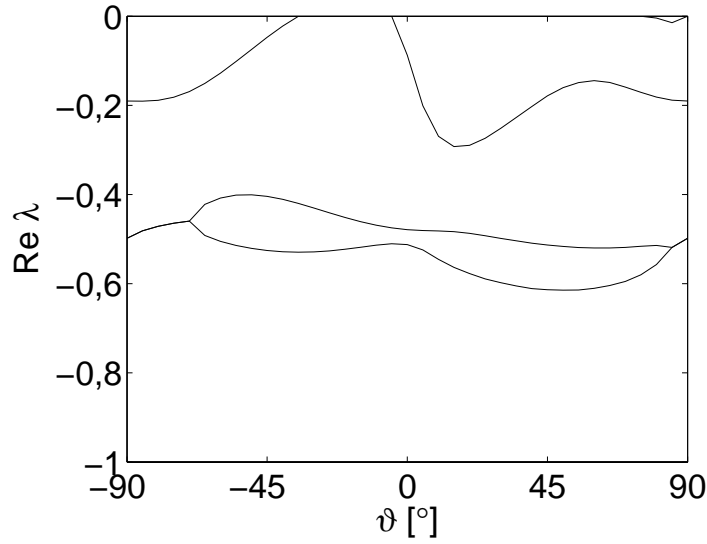
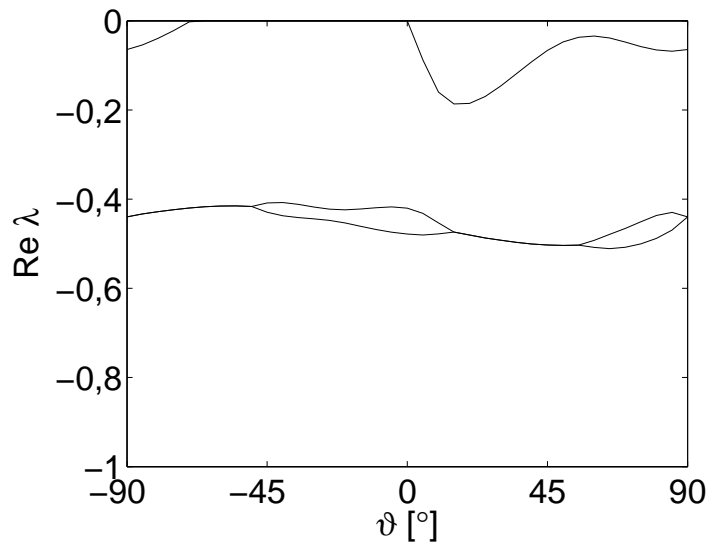
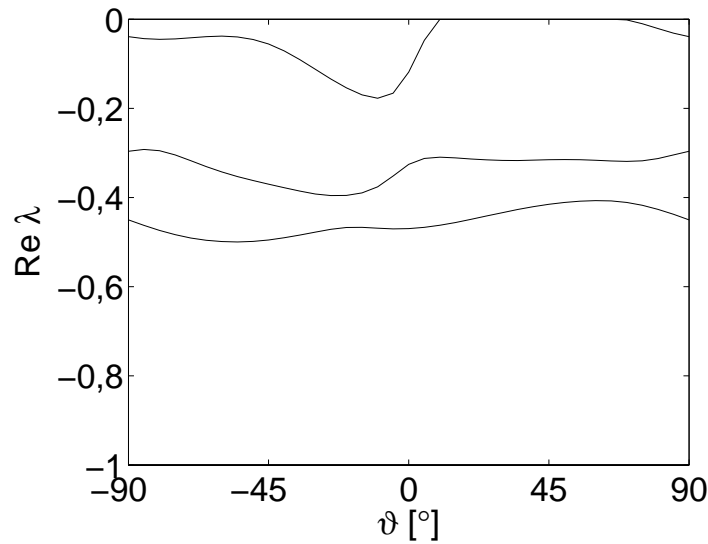
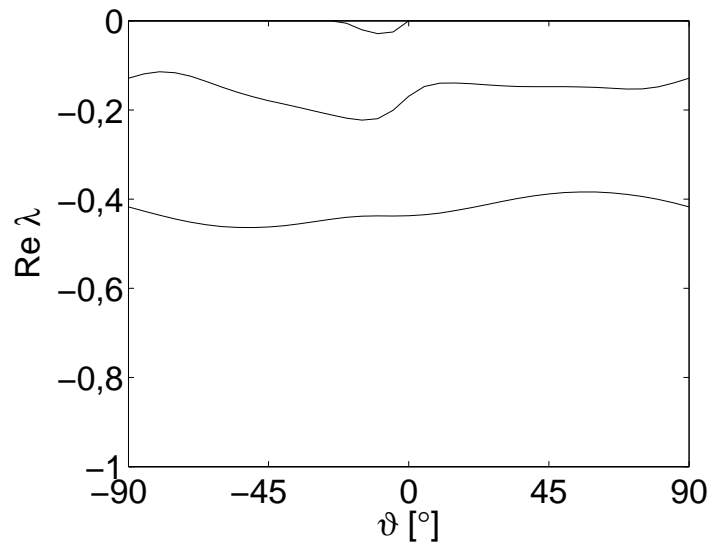
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=0^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=30^\circ$

Abbildung 19: Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .



Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=60^\circ$



Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=90^\circ$

Abbildung 20: Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

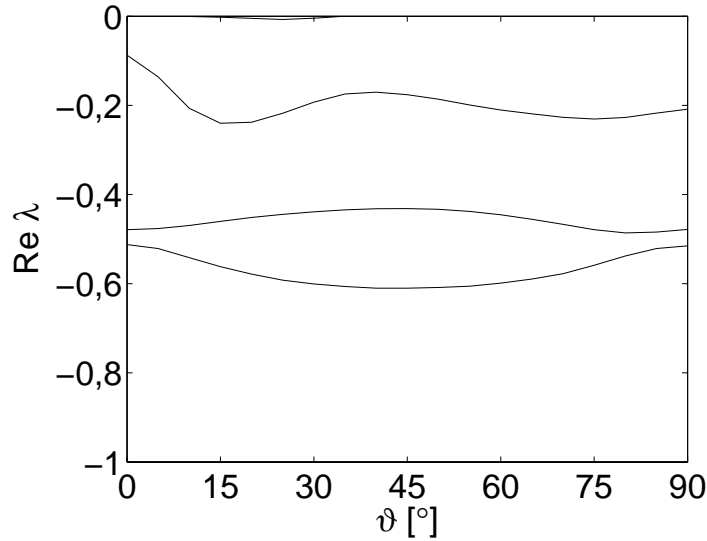
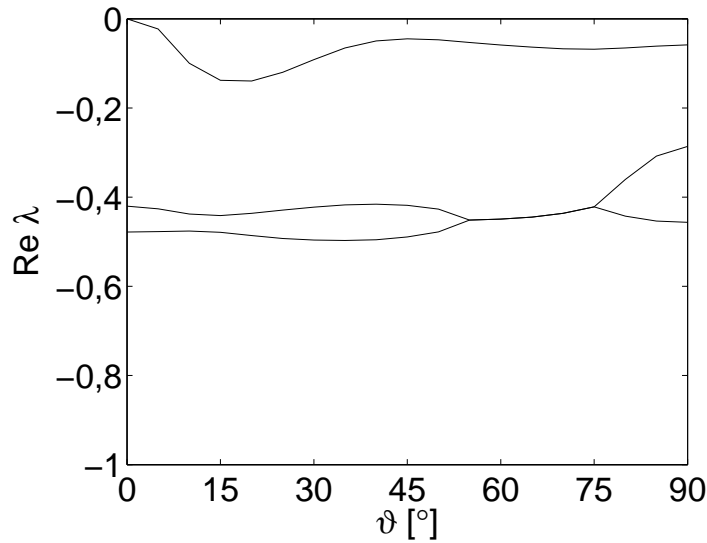
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=0^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=30^\circ$

Abbildung 21: Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

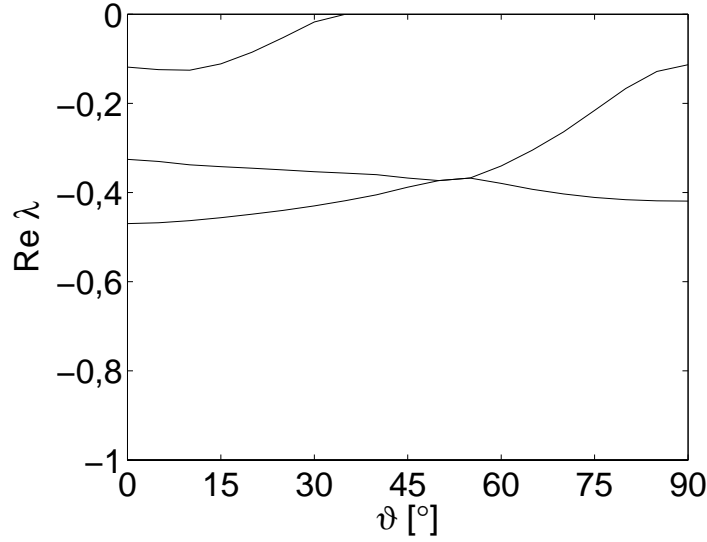
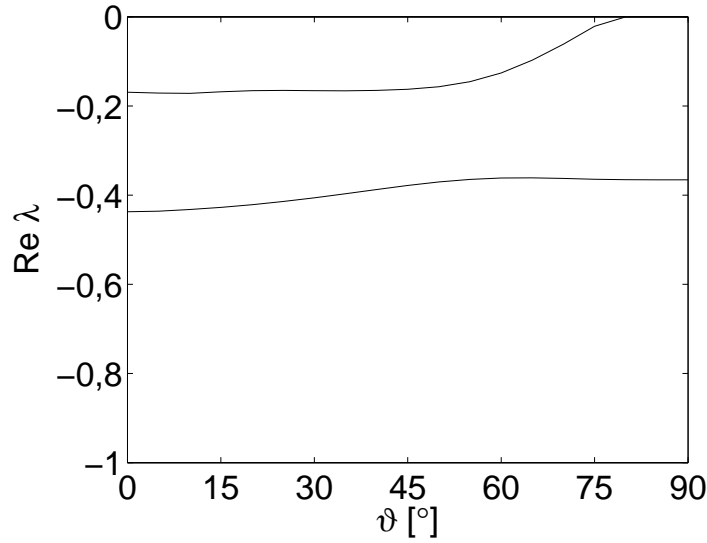
Singulartätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=60^\circ$ Singulartätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=90^\circ$

Abbildung 22: Singulartätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für orthotropes Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

3.3.2 Zwei gerade Interfaces unter variablem Interaktionswinkel am freien Rand

Als nächstes wurden zwei gerade Interfaces unter einem Interaktionswinkel γ am freien Rand mit gebietsweise isotropen Materialien untersucht. Wie in Abbildung 23 dargestellt wird der Halbraum für die Untersuchung mit der Rand-Finite-Elemente-Methode durch eine Halbkugel modelliert. Das Ähnlichkeitszentrum liegt im Mittelpunkt der Kugel. Die zwei Interfaces befinden sich am freien Rand in der y-z-Ebene, in x-Richtung ist die Materialverteilung unveränderlich. Die zwei einzelnen Diskontinuitätslinien Γ_1 in der Abbildung entsprechen der in Abschnitt 3.3.1 untersuchten zweidimensionalen Diskontinuität des Interfaces am freien Rand. Die Interaktion der beiden Diskontinuitätslinien am freien Rand unter einem beliebigen Winkel im Mittelpunkt der Kugel ist jedoch dreidimensional.

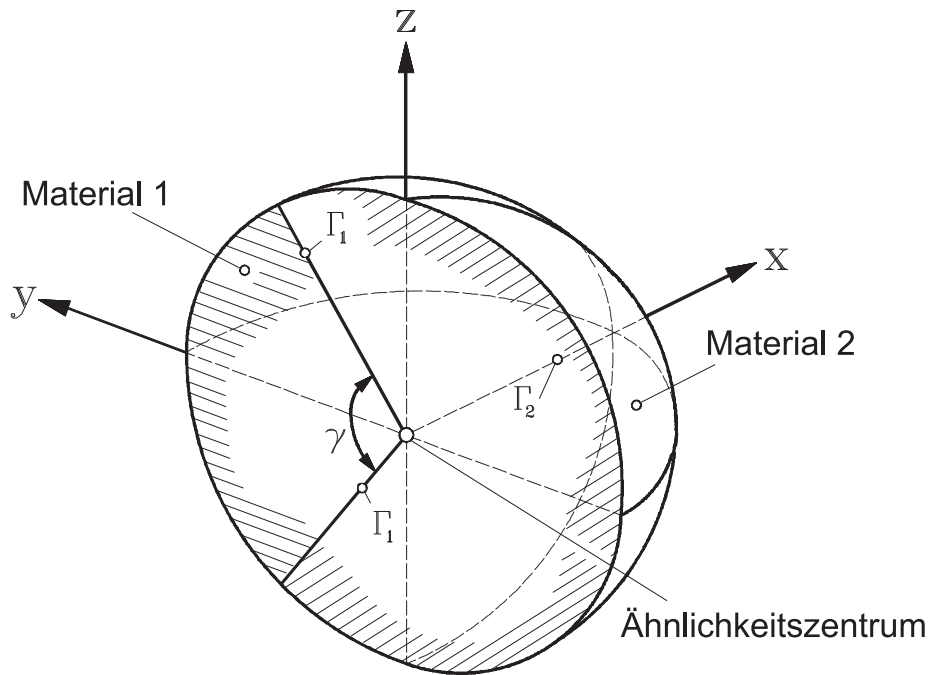


Abbildung 23: Zwei gerade Interfaces unter Interaktionswinkel γ an einem freien Rand eines Halbraums aus zwei isotropen Teilmaterialien.

Der Bereich, der mit dem Interaktionswinkel γ bemessen wird, ist von Material 1 ausgefüllt, der andere Sektor wird durch Material 2 ausgefüllt. Da keine Risse oder Kerben vorgesehen sind, nimmt Material 2 immer einen Sektor mit dem Winkel $360^\circ - \gamma$ ein. Für die Untersuchung der Konfiguration ist zum einen die Variation des Interaktionswinkels

und zum anderen die Variation der Materialdaten von Interesse.

Als erstes soll die Konfiguration für einen festen Interaktionswinkel von $\gamma = 90^\circ$ für verschiedene Materialvariationen untersucht werden. Ähnlich wie beim Interfacekerb am freien Rand wird hier wieder nur die Oberfläche der Halbkugel vernetzt. Hierbei liegen bei dem verwendeten Netz am Rand für die ersten Untersuchungen mit einem Interaktionswinkel von $\gamma = 90^\circ$ entlang der Kreisfläche insgesamt 36 Elemente, das gesamte Netz besteht aus 241 C4-Elementen. Das Netz für diesen Interaktionswinkel ist in Abbildung 24 dargestellt. Material 1 nimmt demnach einen Bereich von 90° in der Kreisebene und somit eines Viertels der modellierten Halbkugel, ein, Material 2 einen Sektor mit Winkel 270° beziehungsweise dreiviertel der gezeigten Halbkugel.

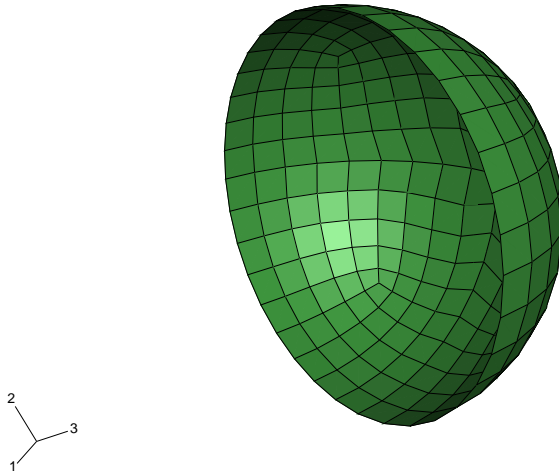


Abbildung 24: RFEM-Diskretisierung mit C4-Elementen für zwei gerade Interfaces unter Interaktionswinkel $\gamma = 90^\circ$ an einem freien Rand eines Halbraums aus zwei isotropen Teilmaterialien.

Als Materialdaten für Material 1 werden $E_1 = 210.000$ MPa und $\nu_1 = 0,3$ festgelegt. Eine Testrechnung mit homogenen isotropen Materialdaten, also $E_1 = E_2 = 210.000$ MPa und $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, liefert als Ergebnis keine Eigenwerte im relevanten Bereich. Dies ist beim freien Rand einer homogenen isotropen Konfiguration das erwartete Resultat.

Anschließend wird für den festen Interaktionswinkel $\gamma = 90^\circ$ und die genannten Materialdaten für Material 1 für verschiedene Elastizitätsmoduli E_2 für Material 2 jeweils eine Variation der Querkontraktionszahl ν_2 durchgeführt. Als Werte für E_2 werden 2.100 MPa,

50.000 MPa, 120.000 MPa und 150.000 MPa betrachtet. Diese Auswahl ist natürlich begrenzt, ist jedoch ausreichend um einen Eindruck vom Einfluss des Verhältnisses der Elastizitätsmoduli auf die Singularitätsordnung zu erhalten. Die Querkontraktionszahl wird innerhalb des Wertebereichs 0 bis 0,49 in Schritten von $\Delta\nu = 0,01$ variiert, somit werden für jeden Wert von E_2 50 Rechnungen durchgeführt.

Die Ergebnisse für diese Rechnungen sind in den Abbildungen 25 und 26 für die verschiedenen Werte von E_2 dargestellt. Hier ist jeweils der Realteil im interessanten Wertebereich über der Querkontraktionszahl ν_2 aufgetragen. Sowohl für $E_2 = 2.100$ MPa als auch für $E_2 = 50.000$ MPa sind die Ergebnisse im gesamten Bereich rein reell, für $E_2 = 120.000$ MPa und $E_2 = 150.000$ MPa treten für höhere Querkontraktionszahlen auch Imaginärteile auf, auf deren Darstellung hier jedoch verzichtet wird.

Aus den Ergebnissen lässt sich zum einen sehen, dass die Singularitätsordnungen für den kleinsten Wert von E_2 am stärksten sind und für steigende Werte von E_2 abnehmen. Hierbei tritt für den kleinsten Wert von E_2 für einige Bereiche der Querkontraktionszahl eine Singularitätsordnung auf, die stärker als die klassische Rissspitzensingularität ist. Für höhere Werte von E_2 treten nur sehr schwache Singularitäten auf, bis sie im bereits betrachteten homogenen Fall (also $E_2 = 210.000$ MPa) komplett verschwinden. Dies verdeutlicht ebenso wie beim zweidimensionalen Bimaterialkerb, dass in Multimaterialkonfigurationen unterschiedliche Materialeigenschaften einen großen Einfluss auf die Singularitätsordnung haben und in solchen Konfigurationen bereits ohne auffallende geometrische Diskontinuitäten starke Singularitätsordnungen auftreten können. Die gewählten Materialwerte liegen hierbei durchaus im technisch relevanten Bereich. Auch die Anordnung der Materialien am freien Rand mit dem Interaktionswinkel von $\gamma = 90^\circ$ ist sicherlich in der Praxis in einigen Strukturen beispielsweise mit Fügeverbindungen aufzufinden.

In Bezug auf die Abhängigkeit der Singularitätsordnung von der Querkontraktionszahl lassen sich keine allgemeinen Aussagen treffen. Liegt für den ersten Wert des Elastizitätsmoduls E_2 die größte Singularitätsordnung im Bereich höherer Querkontraktionszahlen, so ist der Maximalwert für die höheren Werte des Elastizitätsmoduls E_2 eher im niedrigen Bereich der Querkontraktionszahl. Auch ist der Verlauf allgemein nicht von sehr ähnlicher Natur nur mit unterschiedlichen Wertebereichen, wie dies bei einigen anderen Parametervariationen beispielsweise beim Interfacekerb zu beobachten war. Im Einzelfall muss also für eine bestimmte Wahl eines Elastizitätsmoduls das gesamte Spektrum der Querkontraktionszahl untersucht werden.

Als nächstes wird für feste Materialdaten der Interaktionswinkel γ variiert. Hierbei wurde für Material 1 wieder der Elastizitätsmodul $E_1 = 210.000$ MPa und für Material 2

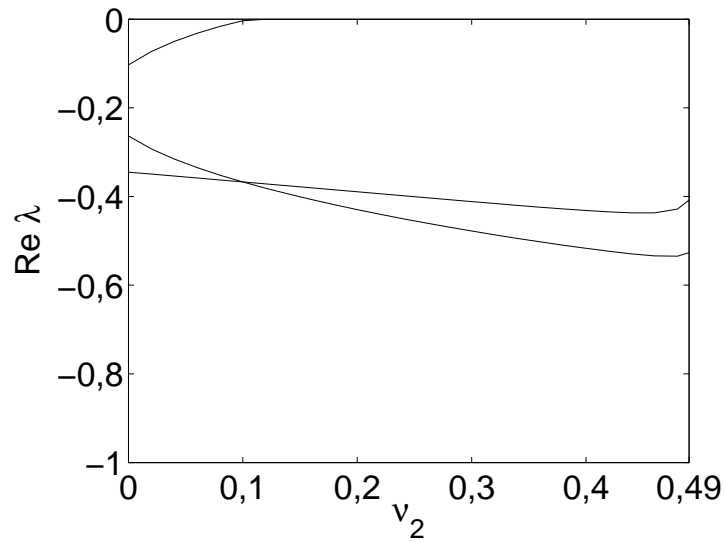
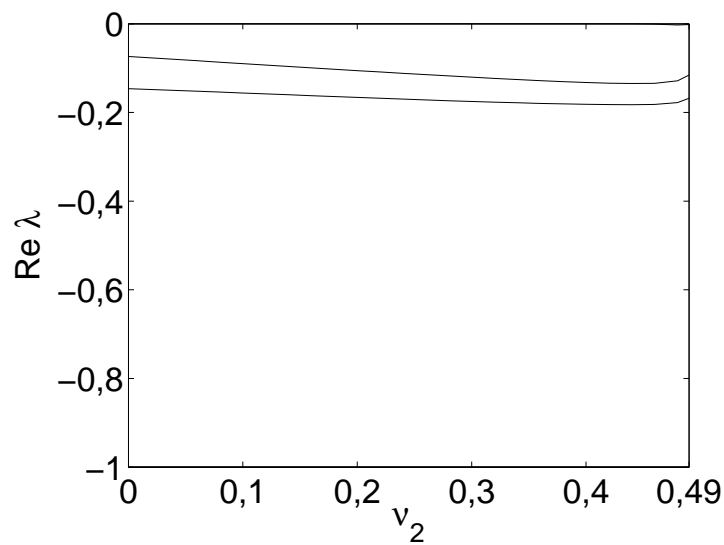
Singularitätsordnungen für $E_2 = 2.100$ MPaSingularitätsordnungen für $E_2 = 50.000$ MPa

Abbildung 25: Singularitätsordnungen für zwei gerade Interfaces unter Interaktionswinkel $\gamma = 90^\circ$ am freien Rand eines Halbraums aus zwei isotropen Teilmaterialien mit $E_1 = 210.000$ MPa und $\nu_1 = 0,3$ für verschiedene Werte von E_2 in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_2 .

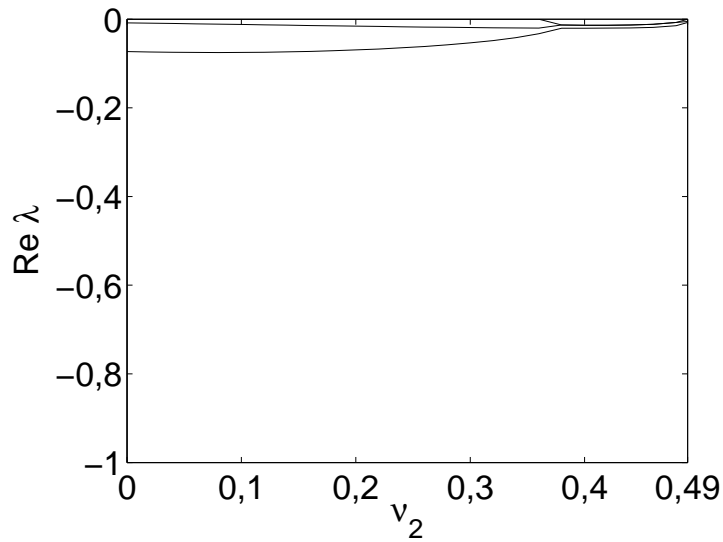
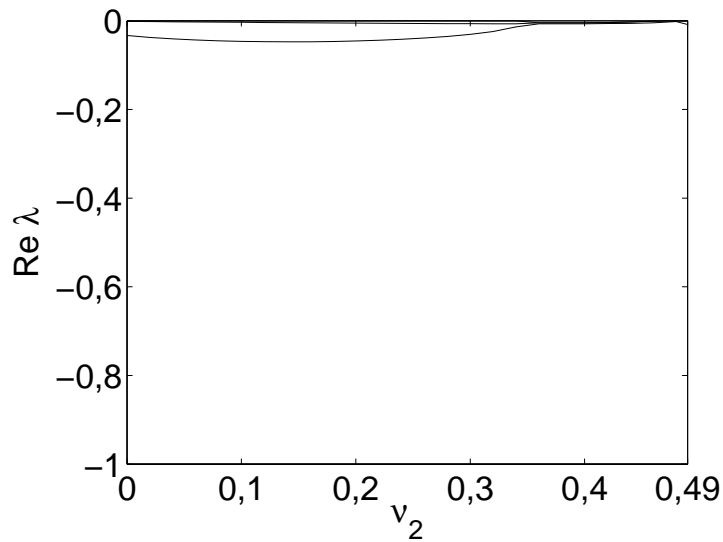
Singularitätsordnungen für $E_2 = 120.000$ MPaSingularitätsordnungen für $E_2 = 150.000$ MPa

Abbildung 26: Singularitätsordnungen für zwei gerade Interfaces unter Interaktionswinkel $\gamma = 90^\circ$ am freien Rand eines Halbraums aus zwei isotropen Teilmaterialien mit $E_1 = 210.000$ MPa und $\nu_1 = 0,3$ für verschiedene Werte von E_2 in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_2 .

nun der Elastizitätsmodul $E_1 = 2.100$ gewählt, da diese Materialkombination in den vorherigen Rechnungen zu den stärksten Singularitätsordnungen führte. Die Querkontraktionszahl wird für beide Materialien auf 0,3 festgesetzt.

Für eine Variation des Interaktionswinkels γ und damit verbunden natürlich automatisch auch des Sektorenwinkels von Material 2 ist eine neue Vernetzung erforderlich. Eine kontinuierliche Variation des Winkels wäre natürlich ideal, ist jedoch schwierig zu realisieren. Daher wurden hier einzelne feste Winkel beziehungsweise Winkelkombinationen herausgesucht, die das mögliche Spektrum hinreichend abdecken. Neben dem bereits untersuchten Fall von $\gamma = 90^\circ$ wurden die Winkel $\gamma = 5^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $\gamma = 150^\circ$ und $\gamma = 180^\circ$, sowie durch Nutzung der für diese Winkel erstellten Netze mit Umkehrung der Materialeigenschaften noch die Winkel $\gamma = 210^\circ$, $\gamma = 240^\circ$, $\gamma = 270^\circ$, $\gamma = 300^\circ$, $\gamma = 330^\circ$ und $\gamma = 355^\circ$ betrachtet. Der Sektorenwinkel für Material 2 ist dann wie bereits erwähnt jeweils der Komplementärwinkel zu γ .

Die Ergebnisse sind in Abbildung 27 zusammengefasst. Hierbei ist der Realteil der Singularitätsordnung über dem Interaktionswinkel γ aufgetragen. Da die Ergebnisse nur im Abstand von meistens $\Delta\gamma = 30^\circ$ vorliegen, sind die dargestellten Kurven entsprechend in den Zwischenbereichen nicht als exakt zu betrachten. Die Auswertung liefert jedoch auch mit diesen Datenpunkten einige interessante Erkenntnisse zum Einfluss der Sektorenwinkel auf die Singularitätsordnungen.

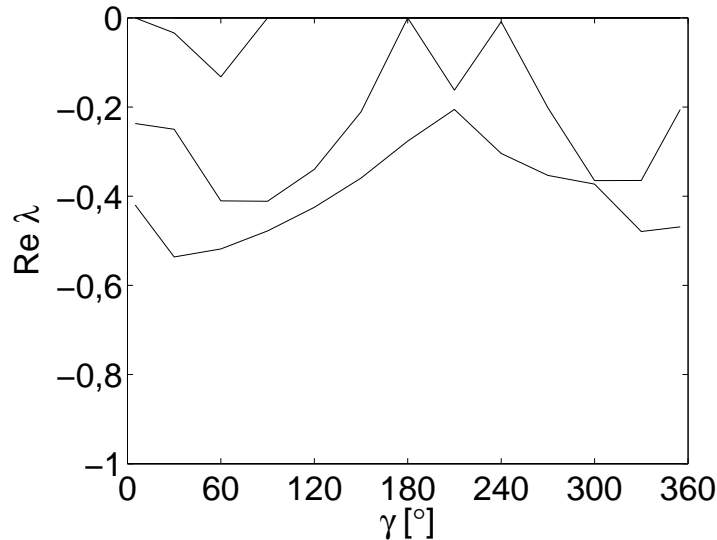


Abbildung 27: Singularitätsordnungen für zwei gerade Interfaces am freien Rand eines Halbraums aus zwei isotropen Teilmaterialien mit $E_1 = 210.000$ MPa, $E_2 = 2.100$ MPa und $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ in Abhängigkeit des variablen Interfacewinkels γ .

Insgesamt ist auffällig, dass die Ergebnisse über dem Bereich von γ nicht symmetrisch sind. Im Bereich $\gamma \leq 180^\circ$ sind die Singularitätsordnungen allgemein stärker als im Bereich $\gamma \geq 180^\circ$. Tendenziell führt also eine Konfiguration, bei der das steifere Material 1 einen kleineren Bereich einnimmt als das weichere Material 2 zu kritischeren Werten. Im direkten Vergleich von einer Winkelkombination für eine Materialanordnung und die genau umgekehrte Situation muss dies jedoch nicht zwingend gelten. So ist als Einzelfall die Konstellation mit $\gamma = 5^\circ$, also einem sehr kleinen Bereich des steiferen Materials 1 umschlossen von einem großen Bereich von Material 2, weniger kritisch als die umgekehrte Situation mit $\gamma = 355^\circ$, bei der ein großer Bereich des steiferen Materials 1 einen kleinen Bereich des weicheren Materials 2 umschließt. Die Werte für $\gamma = 90^\circ$ stimmen mit den bereits ermittelten Werten in Abbildung 25 überein. Die Werte für $\gamma = 180^\circ$ entsprechen den Singularitätsordnungen für ein gerades Interface am freien Rand aus Abschnitt 3.3.1. Die Singularitätsordnungen sind allgemein im mittleren Winkelbereich weniger kritisch und in den Bereichen, in denen ein Material einen Sektor mit einem Winkel ungefähr bis zu 100° einnimmt, allgemein stärker. Der Maximalwert tritt für den Interaktionswinkel $\gamma = 30^\circ$ auf und ist leicht stärker als die Rissspitzensingularität. Bei Betrachtung des gesamten Verlaufs ist davon auszugehen, dass das tatsächliche Maximum des Verlaufs über dem Winkel auch bei einer kontinuierlichen Auswertung der Singularitätsordnung abhängig von γ in diesem Wertebereich von γ liegt und kein wesentlich anderer Wert der maximalen Singularitätsordnung auftritt. Natürlich setzt dies voraus, dass keine großen Unstetigkeiten im Verlauf auftreten, was jedoch in allen anderen betrachteten Situationen nicht der Fall war.

Als weitere Untersuchung wurde nun noch für die nach den vorherigen Ergebnissen interessanteste Materialkombination von $E_1 = 210.000$ MPa, $\nu_1 = 0,3$ und $E_2 = 2.100$ MPa und interessanteste Winkelkombination von $\gamma = 30^\circ$ und einem Sektorenwinkel für Material 2 von 330° eine Variation der Querkontraktionszahl ν_2 im Bereich 0 bis 0,49 durchgeführt. Da aus den ersten Rechnungen keine allgemein gültige Abhängigkeit der Singularitätsordnung zu erkennen war, ist diese Rechnung interessant, um zu sehen, ob der Wert der Singularitätsordnung, der über den Winkelbereich und über den Wertebereich von E_2 bereits annähernd einen Maximalwert darstellt, für andere Werte der Querkontraktionszahl noch stärker wird. Die Querkontraktionszahl ν_2 wird hierbei in Rechenschritten von $\Delta\nu_2 = 0,02$ durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 28 dargestellt.

Hierbei liegen drei Eigenwerte im relevanten Bereich, der stärkste und damit maßgebliche bewegt sich in einem Wertebereich von $-0,4$ für niedrige Werte der Querkontraktionszahl ν_2 bis hin zu einem Maximalwert von beinahe $-0,6$ für den größten Wert der Querkontraktionszahl ν_2 . Somit ist die auftretende Singularitätsordnung zum Teil

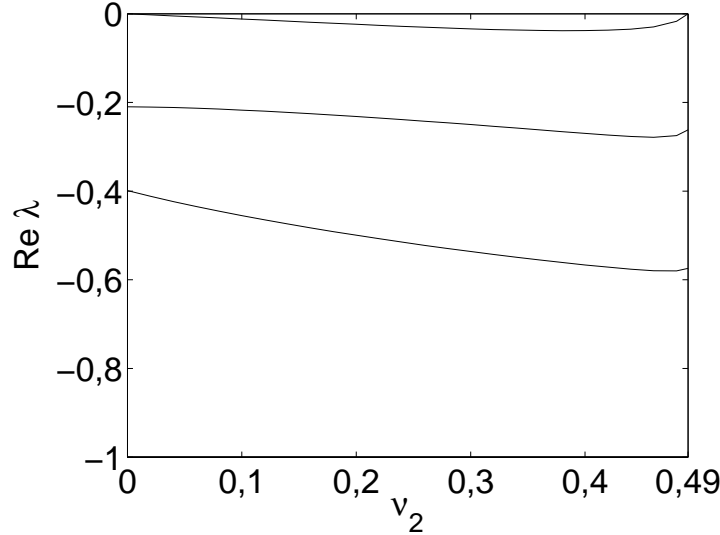


Abbildung 28: Singularitätsordnungen für zwei gerade Interfaces unter Interaktionswinkel $\gamma = 30^\circ$ am freien Rand eines Halbraums aus zwei isotropen Teilmaterialien mit $E_1 = 210.000$ MPa, $E_2 = 2.100$ MPa und $\nu_1 = 0,3$ in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_2 .

schwächer und zum Teil stärker als die Rissspitzensingularitätsordnung. In diesem Fall nimmt die Singularitätsordnung über den gesamten Bereich der Querkontraktionszahl monoton zu. Dieser Zusammenhang war bei den Ergebnissen für den Interaktionswinkel $\gamma = 90^\circ$ (siehe Abbildungen 25 und 26) wie bereits erwähnt nicht für jeden Wert des Elastizitätsmoduls E_2 gegeben. Auch dort trat jedoch für den Fall $E_2 = 2.100$ MPa das Maximum über dem Bereich der Querkontraktionszahl für den höchsten Wert von ν_2 auf.

Im Vergleich zu dem Wert, der in Abbildung 27 mit $\nu_2 = 0,3$ das Maximum darstellt, tritt also für andere Werte von ν_2 tatsächlich noch ein stärkerer Wert der Singularitätsordnung auf. Anhand der durchgeführten Untersuchungen ist davon auszugehen, dass für diese Konfiguration innerhalb der gewählten Wertebereiche von Materialparametern der ermittelte Betrag der Singularitätsordnung von circa $-0,6$ das Maximum für alle Parametervariationen darstellt.

3.4 Fazit

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie die Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Spannungssingularitäten in rein linear-elastischen Konfigurationen genutzt werden

kann. Die Vernetzung erfordert hierbei im Vergleich mit der Finite-Elemente-Methode einen relativ geringen Aufwand, da zum einen nur eine Diskretisierung des Randes notwendig ist und zum anderen keine ausgeprägte Verfeinerung um das Zentrum der Spannungssingularität notwendig ist um diese überhaupt zu erfassen. Die Analyse der untersuchten Modelle zeigt, dass daher auch für dreidimensionale Konfigurationen mit orthotropem Materialverhalten Singularitätsordnungen effizient ermittelt werden können.

In Bezug auf die ermittelten Singularitätsordnungen wurde deutlich, dass das Geschehen an dreidimensionalen Interaktionspunkten von zweidimensionalen materiellen oder geometrischen Diskontinuitäten von komplexer Natur ist. Auf den ersten Blick lassen sich keine einfachen Bildungsregeln zwischen den Singularitätsordnungen der zweidimensionalen Diskontinuitäten und den Singularitätsordnungen an den dreidimensionalen Interaktionspunkten angeben. Es ist somit von Vorteil, ein effizientes Werkzeug zur Analyse von dreidimensionalen Konfigurationen zur Hand zu haben.

Die Variation von geometrischen Parametern und Materialwerten lässt sich mithilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode allgemein gut durchführen. Eine Variation der geometrischen Parameter ist hierbei durch die Generierung von parametrisierten oder unterschiedlichen Netzen aufwendiger als die Variation von Materialparametern, die direkt über das Inputfile erfolgt. Für einige Parameter wie beispielsweise Kerböffnungswinkel lassen sich klare Auswirkungen auf die Singularitätsordnung erkennen – so nimmt die maximale Singularitätsordnung in den betrachteten Konfigurationen mit zunehmendem Kerböffnungswinkel immer ab – wohingegen für andere Parameter wie die Querkontraktionszahl oder den Lagenaufbau der Einfluss auf die Singularitätsordnung nicht immer klar vorhersehbar ist.

Bei den untersuchten Konfigurationen traten zum Teil komplexwertige Singularitätsordnungen und damit oszillierende Spannungen auf. Auch dieses Phänomen unterliegt auf den ersten Blick keinen klar erkennbaren Regeln. Auffällig ist zudem, dass bei mehreren Konfigurationen für bestimmte Wertebereiche von geometrischen Parametern und Materialwerten Singularitätsordnungen auftreten, die die bekannte Singularitätsordnung der Rissspitze überschreiten. Für Multimaterialkonfigurationen mit geometrischen Diskontinuitäten scheinen solche starken Singularitätsordnungen also kein ungewöhnlicher Ausnahmefall zu sein. Folglich ist in der Praxis durchaus damit zu rechnen, dass solche starken Singularitäten bereits bei vergleichsweise harmlos aussehenden Multimaterialkonfigurationen vorliegen können.

4 Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen in Bezug auf Materialdaten und Geometrie

Im vorangegangenen Kapitel wurden auftretende Singularitätsordnungen allgemein in Abhängigkeit von einzelnen Materialkennwerten oder geometrischen Parametern innerhalb festgelegter Wertebereiche nahezu kontinuierlich betrachtet. In der Praxis ist solch eine umfassende Analyse für alle Parameter nicht immer notwendig und sinnvoll. So ist bei der Konstruktion einer Struktur meist eine bestimmte Geometrie oder ein Materialwert festgelegt, andere Parameter wiederum können variiert werden, ohne dass konstruktive Anforderungen missachtet werden. Oft ist es in so einem Fall interessant, den „worst case“ – also die stärkste auftretende Singularitätsordnung für die Variation eines Parameters – zu kennen. Sollte diese ungefährlich sein, ist keine weiterführende Analyse nötig und der Parameter kann frei gewählt werden. Umgekehrt kann natürlich auch direkt für den zulässigen Wertebereich eines Parameters nach dem Minimum der Singularitätsordnung gesucht werden, wenn bei der Auslegung der Struktur das Ziel ist, auftretende Spannungen gemessen an den Singularitätsordnungen möglichst unkritisch zu halten.

Liegt eine Situation vor, die anhand der Singularitätsordnung als versagenskritisch zu betrachten ist, lässt sich dies in manchen Strukturen relativ einfach abmildern, indem ein Winkel oder ein Materialparameter geändert wird. Es ist daher bei einer gegebenen geometrischen Situation und gegebenen Materialien interessant zu wissen, wie sich die Singularitätsordnung verhält, wenn einzelne Parameter verändert werden.

Die Untersuchung der Singularitätsordnungen in Abhängigkeit von bestimmten Parametern ist auch im Hinblick auf die Übertragungsfähigkeit der Erkenntnisse auf andere, in gewisser Hinsicht ähnliche Konfigurationen interessant. Nehmen beispielsweise mit einem sich öffnenden Winkel in einer Konfiguration die Singularitätsordnungen ab, ist zu erwarten, dass sie in anderen Konfigurationen mit ähnlichen Winkelgeometrien ebenfalls abnehmen. Falls sich aus der Untersuchung der Abhängigkeit der Singularitätsordnung von bestimmten Parametern in einzelnen Konfigurationen allgemeine konstruktive Regeln herleiten lassen können, erleichtert dies in der Praxis die sichere Auslegung von Strukturen.

Selbstverständlich ist auch in den Analysen der Kapitel 3 und 5 der Maximalwert der ermittelten Singularitätsordnungen immer von besonderem Interesse. Dort liegt jedoch die Aufmerksamkeit auch noch auf anderen Punkten wie der allgemeinen Qualität der Singularitätsordnungen für eine Konfiguration und möglichen Zusammenhängen der zwei- und

dreidimensionalen Ergebnisse. Dahingegen ist dieses Kapitel der gezielten Ermittlung der maximalen Singularitätsordnungen für gegebene Wertebereiche von Materialdaten und geometrischen Parametern gewidmet.

Nach einer Darstellung des allgemeinen Vorgehens im nächsten Abschnitt folgt die Untersuchung eines zweidimensionalen Multimaterialkerbs mit drei beziehungsweise vier unterschiedlichen Materialsektoren. Anschließend wird die Untersuchung von dreidimensionalen Konfigurationen kurz diskutiert. Das Kapitel schließt mit einem Fazit zur Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode.

4.1 Allgemeines Vorgehen bei der Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen

In diesem Abschnitt soll dargelegt werden, wie die maximale Singularitätsordnung unter Variation von Materialparametern und geometrischen Größen innerhalb festgelegter Wertebereiche ermittelt werden kann. Hierbei werden zum Teil mathematische Optimierungsverfahren eingesetzt, zum Teil werden systematische Parameterstudien durchgeführt.

Zunächst muss zur Ermittlung der maximalen Singularitätsordnung einer Konfiguration festgelegt werden, welche Parameter variiert werden können und innerhalb welcher Wertebereiche dies geschehen darf. Dann muss grundlegend die Wahl getroffen werden, ob hierbei jeweils nur ein Parameter oder direkt mehrere gleichzeitig verändert werden sollen. Das Vorgehen hängt außerdem noch von Rechenzeitanforderungen ab, da eine mathematische Optimierung mit mehreren Parametern gleichzeitig insbesondere für dreidimensionale Konfigurationen schnell sehr aufwendig sein kann.

Für weniger rechenintensive Modelle – vorwiegend für zweidimensionale Konfigurationen – können zur Ermittlung der maximalen Singularitätsordnung systematische Parameterstudien durchgeführt werden. Hierbei wird die Abhängigkeit der Singularitätsordnung von einem einzelnen Parameter einfach durch Rechnungen für verschiedene Werte des Parameters in bestimmten Schrittweiten untersucht. Dies liefert Erkenntnisse über den Einfluss eines Parameters auf die Singularitätsordnung. Es sei angemerkt, dass sich hieraus keine eindeutigen Regeln ergeben müssen, da über die Art der Funktionen der Singularitätsordnung abhängig von den gewählten Parametern nichts bekannt ist.

Dieses Vorgehen lässt sich auch für die gleichzeitige Variation von zwei Parametern anwenden. Hier entsteht ein dreidimensionaler Lösungsraum. Dies liefert eine gute Einsicht in den Einfluss zweier unabhängiger Parameter, ist allerdings deutlich rechenintensiver und aufwendiger im Postprocessing als die Variation eines Parameters. Sofern bereits

der Einfluss der einzelnen Parameter bekannt ist und beide einzeln gesehen in einem bestimmten Wertebereich zu den stärksten Singularitätsordnungen führen, kann der Bereich, in dem unter Variation beider Parameter gleichzeitig das Maximum auftritt, in der Regel natürlich bereits eingeschränkt werden und der Aufwand verringert sich entsprechend.

Schließlich können auch geeignete mathematische Optimierungsverfahren eingesetzt werden. Die Auswahl eines geeigneten Optimierungsverfahrens ist hier unter anderem von der Anzahl der Optimierungsvariablen und von der gewünschten Zuverlässigkeit abhängig. Da die Art der Funktion für die Singularitätsordnung in Abhängigkeit eines gewählten Parameters vorab nicht bekannt ist und ein komplexer Verlauf zu erwarten ist – es liegt beispielsweise in der Regel keine monotone Funktion vor, für die eine Optimierung relativ leicht wäre – ist ein Optimierungsverfahren mit stochastischem Ansatz am sinnvollsten. Wichtig ist bei einem solchen Verfahren, dass das Feld möglicher Parameterkombinationen sinnvoll abgedeckt wird, sodass kein interessantes Ergebnis übersehen wird. Dies ist durch die Wahl geeigneter Einstellungen für das Optimierungsverfahren möglich. Die Optimierung mehrerer Parameter kann hier schnell sehr aufwendig werden, insbesondere wenn bei dreidimensionalen Konfigurationen die Rechenzeit für eine einzelne Analyse bereits vergleichsweise zeitintensiv ist.

Sowohl für die systematische Variation von Parametern als auch die Anwendung von mathematischen Optimierungsverfahren wurde im Rahmen dieser Arbeit die kommerzielle Software Isight [24] verwendet. In diesem Programm sind einige Optimierungsalgorithmen implementiert, es können jedoch auch mit der Funktion „Design of Experiments“ anwenderfreundlich Parameterstudien durchgeführt werden. Grundlegend funktioniert die Optimierung mit Isight so, dass die Software ein ausgewähltes Programm – in diesem Fall die RFEM-Implementierung Caesar – mit einer zugewiesenen Eingabe-Datei aufruft. In dieser Eingabe-Datei wird der gewünschte zu variierende Parameter markiert und in Isight der zu untersuchende Wertebereich für diesen Parameter festgelegt. In einer Beispiel-Ausgabe-Datei des eingebundenen Programms (hier Caesar) wird der Ausgabeparameter, auf den sich die Optimierung beziehen soll, festgelegt – in diesem Fall also die Singularitätsordnung. Die Software Isight ruft dann das Programm Caesar für einen Startwert auf, der durch den ausgewählten Optimierungsalgorithmus festgelegt ist. Nach der Auswertung der zugehörigen Singularitätsordnung wird der nächsten Wert ausgewählt, für den das Programm aufgerufen wird. Bei einer Parameterstudie erfolgt die Auswahl der Werte, für die das eingebundene Programm aufgerufen wird, entsprechend der definierten Wertebereiche und Schrittgrößen. Für die untersuchten Konfigurationen im Rahmen dieser Arbeit erfolgte die Auswahl des Optimierungsverfahrens unter den in Isight implementierten Methoden zuerst nach der Art des Verfahrens und der Anzahl der

Optimierungsparameter. Dann wurden in Frage kommende Verfahren an Beispielen mit bereits berechneten Ergebnissen getestet – in der Regel lagen für jede Konfiguration bereits einzelne Rechnungen für bestimmte Parameter vor – und jeweils für die weitere Untersuchung der Konfiguration das Verfahren mit der besten Übereinstimmung gewählt.

Insgesamt können bei dem gewählten Vorgehen Materialparameter allgemein sehr leicht variiert werden, da sie in der Regel direkt explizit in der Eingabe-Datei angegeben werden. Geometrische Parameter hingegen sind zumindest in der verwendeten RFEM-Implementierung Caesar nur indirekt im Netz enthalten. Anders als beispielsweise bei einer kommerziellen Finite-Elemente-Software wie Abaqus, bei der auch eine Parametrisierung von geometrischen Parametern relativ leicht entweder über das CAE-Interface oder die zugrundeliegende Python-Syntax umgesetzt werden kann, ist dies bisher in Caesar vergleichsweise aufwendig. Ein Netz muss entweder manuell für verschiedene Geometrien neu generiert werden oder geeignet parametrisiert werden. Je nach Komplexität der Geometrie kann dies eine anspruchsvolle Aufgabe sein. Für einen zweidimensionalen Multimaterialkerb lassen sich die Sektorenwinkel beispielsweise relativ einfach variieren. Soll ein geometrischer Parameter in einer dreidimensionalen Konfiguration in relativ kleinen Schritten variiert werden, muss das Netz entsprechend fein ausgelegt werden. Dies kann teilweise problematisch werden, da dann entweder die gesamte Konfiguration sehr fein vernetzt werden muss und der Rechenaufwand entsprechend ansteigt oder in einem Bereich ein entsprechender Übergang zwischen feiner und grober Vernetzung gestaltet werden muss. Da der Aufwand insbesondere bei dreidimensionalen Konfigurationen und Variation geometrischer Parameter vergleichsweise hoch ist, wurden im Rahmen dieser Arbeit überwiegend zweidimensionale Konfigurationen betrachtet. Dies liefert bereits einen guten Einblick in die Möglichkeiten, die eine gezielte Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen von Konfigurationen im Hinblick auf die Singularitätsordnung bietet.

4.2 Zweidimensionaler Trimaterialkerb

Als erstes wurde ein zweidimensionaler Kerb mit bis zu drei unterschiedlichen linear-elastischen isotropen Materialien wie in Abbildung 29 dargestellt untersucht. Der Fall eines Kerbs in homogenem Material und eines Bimaterialkerbs ist also hier mit eingeschlossen. Ein zweidimensionaler Kerb mit drei Materialien ist eine Situation, die auf den ersten Blick relativ simpel erscheint und bei der zu vermuten wäre, dass dort bereits alle analytischen Lösungen vorliegen. Obwohl einige Beiträge zu dieser Situation existieren, sind analytische Lösungen meist auf bestimmte Materialarten wie beispiels-

weise rein isotropes oder rein anisotropes Materialverhalten eingeschränkt. Auch scheint das Augenmerk in gesichteter Literatur eher auf der Bereitstellung einer Lösung als auf der Auswertung im Hinblick auf maximal auftretende Singularitätsordnungen zu liegen. Daher wurde dieses Beispiel im Rahmen dieser Arbeit anhand der Rand-Finite-Elemente-Methode gezielt im Hinblick auf Extremwerte der Singularitätsordnungen untersucht.

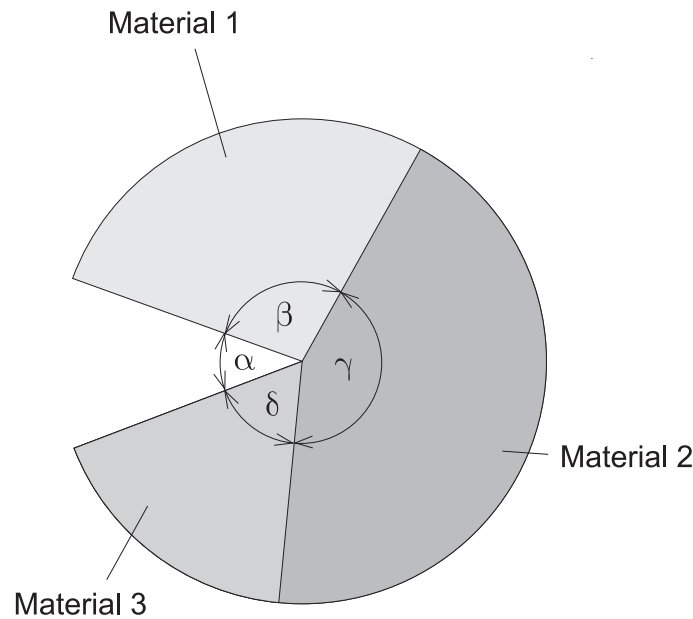


Abbildung 29: Zweidimensionaler Trimaterialkerb mit Kerböffnungswinkel α und Material-Sektorenwinkeln β, γ, δ .

Der in Abbildung 29 dargestellte zweidimensionale Kerb wurde mit drei Sektoren aus jeweils linear-elastischen isotropen Materialien betrachtet. Variiert werden nun sowohl der Kerböffnungswinkel α und die Sektorenwinkel β, γ, δ als auch die isotropen Materialparameter der einzelnen Sektoren. Für die Winkel gilt die Einschränkung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. Als zulässiger Wertebereich für die jeweiligen Elastizitätsmoduli wurde 2.100 MPa bis 210.000 MPa festgelegt. Die Querkontraktionszahlen haben bei homogenem Material keinen Einfluss. Für mehrere Materialien hängen die Singularitätsordnungen allgemein von der Querkontraktionszahl ab. Da der Einfluss der Querkontraktionszahl für diese Konfigurationen jedoch nur gering ist, wird im Folgenden für alle Querkontraktionszahlen der Wert 0,3 festgelegt. Die Optimierung wurde mithilfe von Isight durchgeführt. Eine ausführliche Untersuchung mit Variation der einzelnen Parameter sowie Variation verschiedener Werte gleichzeitig wurde im Rahmen einer Bachelor-Arbeit von Schuhmann [81] durchgeführt. Die Optimierung erfolgte hierbei in der Art einer Rasterung in 10° -Schritten. Die wichtigsten Ergebnisse hiervon sind in Tabelle 6 zusammengefasst. Die gleiche Situation wurde zudem von Sator [80] auch analytisch mithilfe der Methode

der komplexen Potentiale untersucht, wodurch die semi-analytisch ermittelten Resultate bestätigt wurden.

Zur Modellierung mit der Rand-Finite-Elemente-Methode wird das Ähnlichkeitszentrum für den Trimaterialkerb wie bereits für den homogenen Kerb in Abschnitt 3.2.1 in den Kerbgrund gelegt. Der Rand wird dann mit einer festen Anzahl von 40 C2-Elementen diskretisiert.

Zunächst wurde eine Optimierung für den homogenen Fall durchgeführt, in dem alle drei Materialektoren die gleichen Eigenschaften haben. Variiert werden hier also der Kerböffnungswinkel α und die Elastizitätsmoduli $E_1 = E_2 = E_3$. Hier ergibt sich die maximal auftretende Singularitätsordnung bei Optimierung der Winkel und Materialparameter wie zu erwarten für den Kerböffnungswinkel 0° , also den Grenzfall eines Risses, zur bekannten Rissspitzensingularitätsordnung von $-0,5$. Die Konfiguration ist in Abbildung 30 dargestellt. Diese Singularitätsordnung tritt, ebenso wie zu erwarten, unabhängig von den gewählten Materialparametern auf.

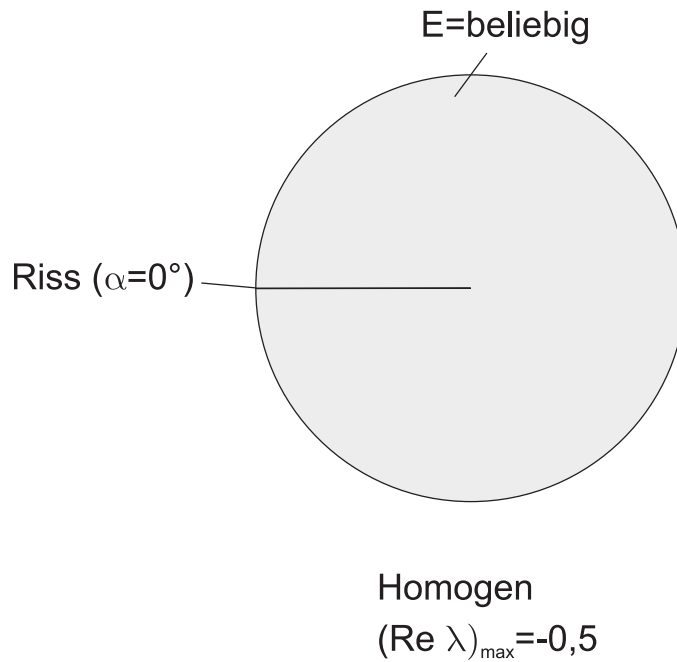


Abbildung 30: Konfiguration für den homogenen Kerb mit maximaler Singularitätsordnung.

Anschließend wird die Konfiguration als Bimaterialkerb untersucht, bei dem nun Material 2 und 3 die gleichen Eigenschaften besitzen. Die Elastizitätsmoduli E_1 und E_2 sind innerhalb des Bereichs 2.100 MPa bis 210.000 MPa variabel, die Winkel unterliegen wieder der Restriktion $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. Hier ergibt sich nun als Maxi-

Optimierte Parameter	Homogen	Bimaterial	Trimaterial
Elastizitätsmodul E_1	beliebig	210.000 MPa	210.000 MPa
Elastizitätsmodul E_2	-	2.100 MPa	2.100 MPa
Elastizitätsmodul E_3	-	-	210.000 MPa
Kerböffnungswinkel α	0°	0°	0°
Sektorenwinkel β	$\beta + \gamma + \delta = 360^\circ$	10°	10°
Sektorenwinkel γ	-	$\gamma + \delta = 350^\circ$	340°
Sektorenwinkel δ	-	-	10°
maximale Singularitätsordnung	-0,5	-0,72	-0,9

Tabelle 6: Ergebnisse der Optimierung für den Trimaterialkerb.

malwert eine Singularitätsordnung von $-0,72$. Diese tritt ebenso wie zu erwarten für den minimalen Kerböffnungswinkel $\alpha = 0^\circ$, also den Riss, auf. Die Elastizitätsmoduli der beiden Materialien unterscheiden sich innerhalb des gewählten Wertebereichs maximal. Die entsprechende Konfiguration ist in Abbildung 31 dargestellt. Hierbei sei erwähnt, dass der Betrag der Singularitätsordnung weiter ansteigt, wenn das Verhältnis der Elastizitätsmoduli noch extremer gewählt wird, dies ist allerdings für real auftretende Materialdaten bei technischen Strukturen nur begrenzt relevant und dient eher dem theoretischen Verständnis. Die ermittelten Winkel für den Maximalwert der Singularitätsordnung für den betrachteten Bimaterialkerb betragen $\beta = 10^\circ$ für Material 1 mit dem höchstmöglichen Wert für den Elastizitätsmodul $E_1 = 210.000$ MPa und $\gamma + \delta = 350^\circ$ für Material 2 und 3 mit dem niedrigsten Wert für den Elastizitätsmodul $E_2 = E_3 = 2.100$ MPa. Die kritischste Situation für einen Bimaterialkerb mit isotropen Materialien ist also ein Riss in einem relativ weichen Material mit einer dünnen Schicht von steiferem Material. Die umgekehrte Situation mit einem schmalen Sektor aus vergleichsweise weichem Material und einem großen Bereich aus vergleichsweise steifem Material führt hingegen lediglich zur bekannten Rissspitzensingularitätsordnung. Aus dieser Konfiguration lässt sich ableiten, dass ein dünner Sektor mit steiferem Material und ein großer Bereich mit weicherem Material scheinbar kritischer als ein dünner Sektor mit weichem Material umgeben von steiferem Material ist. Das Ergebnis ist nicht nur interessant, da es pauschale Anwenderempfehlungen ermöglicht, bemerkenswert ist vor allem die auftretende Singularitätsordnung, die stärker als die Rissspitzensingularitätsordnung und damit eine sogenannte Hypersingularität ist. Soweit existierende analytische Lösungen in der Literatur dieses Ergebnis innerhalb der Gesamtlösung bereitstellen, scheint es wenig Beachtung zu finden. Wenngleich die Existenz von solchen Hypersingularitäten bekannt ist, wird in der linearen Bruchmechanik allgemein doch häufig die Rissspitzen-singularität als „worst case“ zitiert und ist als solche im Bewusstsein vieler Ingenieure.

Das untersuchte Beispiel mit zwei Materialien zeigt, dass bereits bei einer einfachen Konfiguration mit rein isotropen Materialien eine wesentlich stärkere Singularitätsordnung auftreten kann. Hierbei sind die gewählten Elastizitätsmoduli durchaus realistische Beispiele, wobei die Singularitätsordnung mit sich stärker unterscheidenden Werten wie erwähnt noch höher ausfallen kann.

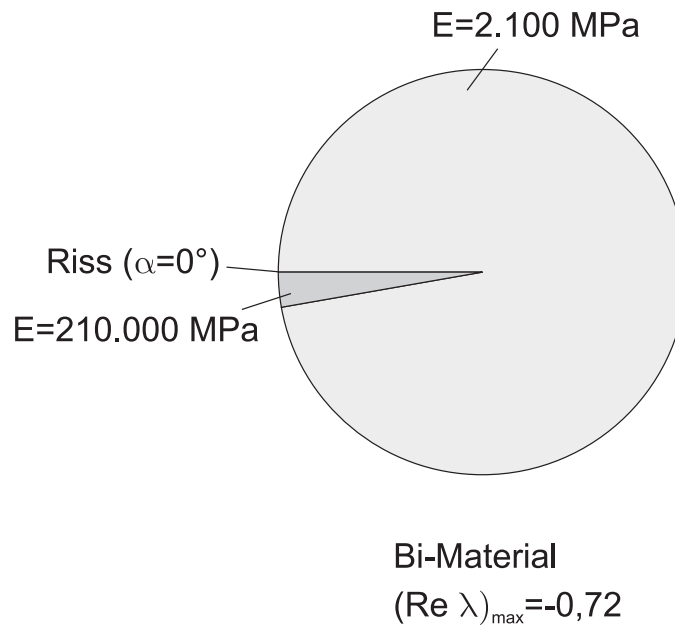


Abbildung 31: Konfiguration für den Bimaterialkerb mit maximaler Singularitätsordnung.

Zuletzt wurde die Optimierung mit drei unterschiedlichen Materialien wieder in den gleichen Wertebereichen für die Elastizitätsmoduli durchgeführt. Hier ergibt sich mit einer maximalen Singularitätsordnung von $-0,9$ eine noch kritischere Hypersingularität. Diese tritt wiederum für einen Riss – also Kerböffnungswinkel $\alpha = 0^\circ$ – auf, der von zwei dünnen Sektoren mit dem maximal möglichen Elastizitätsmodul von 210.000 MPa umrandet ist. Diese Konfiguration ist in Abbildung 32 dargestellt. Diese nehmen wiederum jeweils nur einen Sektorwinkelbereich von 10° ein. Der größte Sektor mit Material 2 füllt einen Winkelbereich von 340° aus und besitzt den niedrigstmöglichen Elastizitätsmodul von 2.100 MPa. Die ermittelte Konfiguration ist der des Bimaterialkerbs sehr ähnlich, auch hier ist ein dünner Bereich des steiferen Materials angrenzend an einen großen Bereich des weichen Materials am kritischsten. Hier liegt der Riss nun vollständig im steiferen Bereich, was bei der vorgegeben Konfiguration eines Bimaterialkerbs natürlich nicht möglich ist. Die Hypersingularität wird dadurch innerhalb gleicher Wertebereiche für die Materialparameter gemessen am Betrag der Singularitätsordnung noch gesteigert. Die

umgekehrte Situation, bei der der Riss umgeben von einem dünnen Sektor weichen Materials liegt und das steifere Material den restlichen Bereich ausfüllt, ist wieder weniger kritisch. Sollte ein Konstrukteur in einer Struktur eine ähnliche Konfiguration benötigen, liefern diese Ergebnisse somit Hinweise auf zu bevorzugende Konfigurationen. Allgemein ist anhand einer Analyse mit der Rand-Finite-Elemente-Methode eine Einschätzung möglich, welche Materialien und Sektorenwinkel auftretende Singularitäten abmildern könnten. Natürlich ist dies keine umfassende bruchmechanische Bewertung, liefert aber einen ersten Anhaltspunkt für die Kritikalität einer vorliegenden Situation und durch den geringen Aufwand eine schnelle erste Einschätzung.

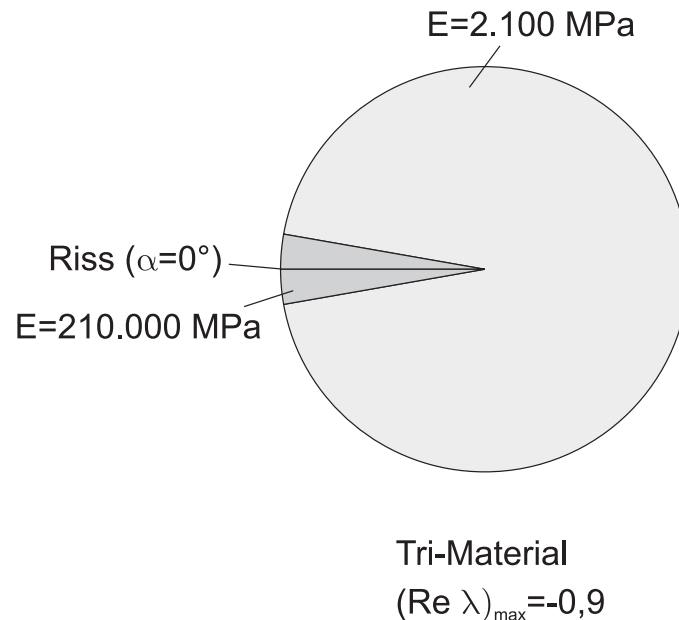


Abbildung 32: Konfiguration für den Trimaterialkerb mit maximaler Singularitätsordnung.

Bei der Betrachtung des Trimaterialkerbs ist weiterhin interessant, dass auch für eine Konfiguration mit einem Kerböffnungswinkel $\alpha = 180^\circ$ und einem großen Bereich von weichem Material mit jeweils dünnen Sektoren von 10° mit steifem Material am Rand (siehe Abbildung 33) eine Hypersingularität mit einer Singularitätsordnung von $-0,84$ auftritt. Dies ist bemerkenswert, da diese Geometrie in homogenem Material harmlos ist in dem Sinne, dass dann dort überhaupt keine Singularität mehr auftritt. Dadurch wird deutlich, dass die auftretenden Hypersingularitäten nicht in erster Linie auf den Riss zurückzuführen sind, was bei der vorher beschriebenen Konfiguration mit dem Maximalwert noch naheliegend wäre. Die stark unterschiedlichen Materialeigenschaften kombiniert mit dünnen Randbereichen des steiferen Materials hat scheinbar einen we-

sentlichen Anteil an der Entstehung von starken Singularitäten. Auch dies zeigt wieder deutlich, dass bereits bei recht simplen Beispielen überraschende Ergebnisse auftreten können, die ohne genaue Untersuchung der Singularitätsordnungen nicht unbedingt auf der Hand liegen.

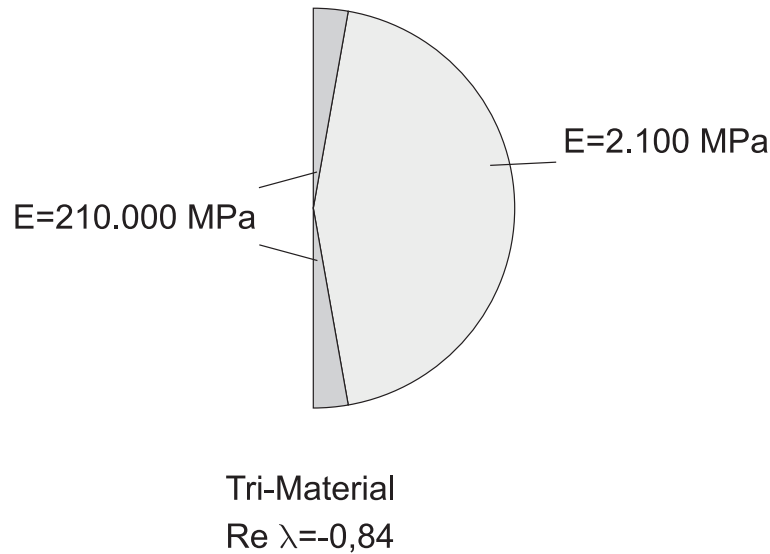


Abbildung 33: Trimaterialkerb-Konfiguration mit Singularitätsordnung $-0,84$.

4.3 Zweidimensionaler Viermaterialkerb

Als nächste Situation wurde ein zweidimensionaler Viermaterialkerb wie in Abbildung 34 dargestellt untersucht. Alle vier Sektoren besitzen isotrope Materialeigenschaften. Wie für den Trimaterialkerb soll die stärkste Singularitätsordnung unter Variation der Parameter ermittelt werden. Hierbei wird für alle Materialien ein fester Wert von $\nu = 0,3$ für die Querkontraktionszahl gewählt. Nachdem die maximale Singularitätsordnung für einen Kerböffnungswinkel $\alpha = 0^\circ$ zu erwarten ist, wird hier direkt nur die Konfiguration mit einem Riss untersucht. Die Analyse des Trimaterialkerbs hat gezeigt, dass auch für andere Kerböffnungswinkel sehr starke Singularitätsordnungen auftreten können. Daher sollte der Kerböffnungswinkel bei der Untersuchung allgemein nicht von vorneherein auf den Riss beschränkt werden. Um jedoch den Maximalwert, der in jedem Fall für eine Konfiguration mit Riss zu erwarten ist, aufzudecken, ist diese Beschränkung sinnvoll. Für den Viermaterialkerb wird dieses Vorgehen gewählt, da die Variation aller Werte mit jedem zusätzlichen Parameter deutlich aufwendiger wird und im ersten Schritt eine Einschränkung der Parameter nützlich ist.

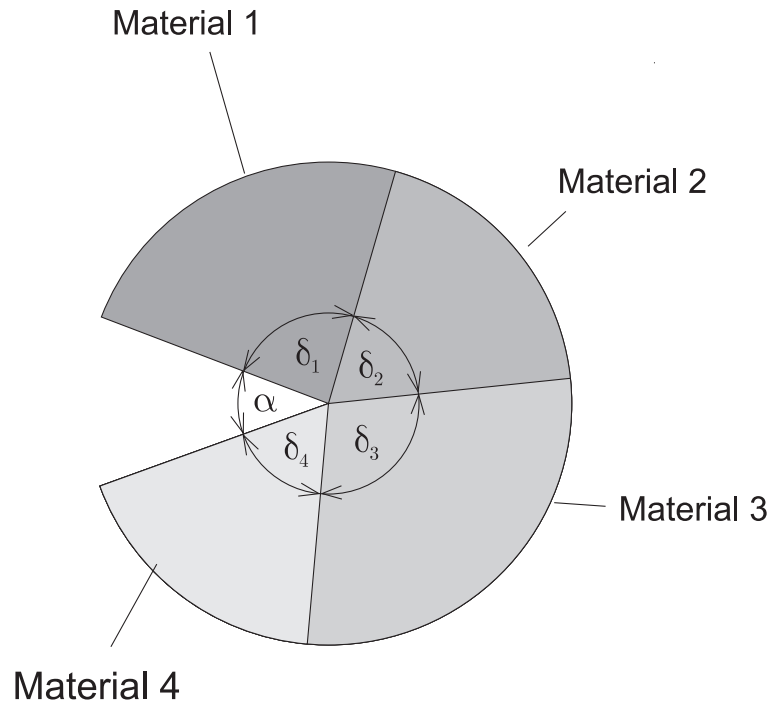


Abbildung 34: Zweidimensionaler Viermaterialkerb mit Kerböffnungswinkel α und Material-Sektorenwinkeln $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$.

Für die Elastizitätsmoduli wird wieder der Wertebereich von 2.100 bis 210.000 MPa festgelegt. Da aus den vorherigen Beispielen bereits klar ist, dass Maximalwerte der Singularitätsordnungen bei maximalen Unterschieden der Materialeigenschaften auftreten, werden hier für die einzelnen Materialsektoren direkt nur die Werte 2.100 MPa und 210.000 MPa zur Auswahl gestellt. Auch hier kann eine vollständige Untersuchung je nach Zielsetzung von Interesse sein. Zur Ermittlung des Maximalwerts ist es in der Regel bei Optimierungsaufgaben mit mehreren Parametern sinnvoll, Einschränkungen der Parameterwerte zu treffen soweit diese zuverlässig durch mechanische Zusammenhänge oder durch bereits gewonnene Erkenntnisse getroffen werden können. Neben der Einschränkung der Werte sollen auch nur echte Viermaterialkerben untersucht werden, also Konfiguration, bei denen alle Sektoren einen Winkelbereich größer als null annehmen. Insbesondere sollen nebeneinander liegende Sektoren unterschiedliche Materialeigenschaften haben, da die Konfiguration sonst zu einem Kerb in homogenem Material oder einem Bi- oder Trimaterialkerb reduziert wird und diese Konfigurationen bereits durch vorherige Untersuchungen abgedeckt sind. Mit den Anforderungen $E_1 \neq E_2$, $E_2 \neq E_3$ und $E_3 \neq E_4$ ergibt sich aufgrund der Vorauswahl der möglichen Werte für den Elastizitätsmodul letztendlich nur die Kombination $E_1 = E_3 = 2.100$ MPa und $E_2 = E_4 = 210.000$ MPa. Die zwei Werte 2.100 MPa und 210.000 MPa können natürlich

auch umgekehrt den jeweils anderen Sektoren zugewiesen werden, dies ist jedoch aus Symmetriegründen die gleiche Situation.

Für diese Materialanordnung werden nun die vier Material-Sektorenwinkel mit einer Monte-Carlo-Simulation in Isight variiert. Dabei wird die Konfiguration fest mit 72 Linien-Elementen entlang des Randes vernetzt – ein Element entspricht also einem Winkelbereich von 5° . Nach Zufall wird die Anzahl der Elemente für die einzelnen Sektoren variiert, wobei die Summe eben konstant 72 ist und jeder Sektor immer mindestens ein Element besitzt um die echte Viermaterialsituation zu gewährleisten. Insgesamt werden mit der Monte-Carlo-Methode 1000 Variationen generiert und für diese mit der Rand-Finite-Elemente-Methode die Singularitätsordnungen ermittelt. Innerhalb der 1000 Variationen können Doppelungen oder Anordnungen, die aus Symmetriegründen die gleiche Konfiguration abbilden, vorliegen. Da das Ziel das Ermitteln der maximalen Singularitätsordnung ist, ist dies nur im Hinblick auf den Rechenaufwand relevant. Der Rechenzeitaufwand für mögliche Doppelungen ist jedoch gegen den Aufwand, solche auszusortieren, abzuwägen. Für echte Doppelungen ist dieser wohl überschaubar, die Anordnungen, die sich aus Symmetriegründen entsprechen, alle herauszufiltern übersteigt jedoch den zusätzlichen Rechenaufwand einiger unbenötigter Variationen. Wichtig ist, dass durch die gewählte Anzahl der Variationen im Großen und Ganzen alle möglichen Anordnungen von Winkeln abgedeckt sind, was nach Sichtung der generierten Anordnungen der Fall sein sollte.

Die Ergebnisse der Analysen wurden in einer Tabelle ausgewertet, die aufgrund der Anzahl der Rechnungen nicht hier aufgeführt wird. Die gesamten Ergebnisse für die Realteile der Singularitätsordnungen bewegen sich in einem Wertebereich von $-0,7$ bis $-0,3$. Es gibt also sowohl Konfigurationen mit Singularitätsordnungen, die stärker sind als die Rissspitzensingularität, als auch welche, die schwächere Werte aufweisen. Hierbei treten jeweils für viele unterschiedliche Konfigurationen ähnliche maximale Singularitätsordnungen auf. Bei der Betrachtung der Konfigurationen, die zu den stärksten Singularitätsordnungen führen, fällt auf, dass dies allgemein Anordnungen sind, bei denen Material 1 oder Material 4 – also eines der Materialien am Riss – einen sehr großen Bereich ausfüllt und die drei anderen Sektoren jeweils sehr kleine Bereiche von 1 – 2 Elementen, also einem Winkelbereich von $5 - 10^\circ$ einnehmen. Die Konfigurationen mit den unkritischsten Werten der Singularitätsordnungen von circa $-0,3$ besitzen allgemein entweder ähnlich große Sektoren der einzelnen Materialien oder enthalten noch relativ dünne Sektoren mit einem Winkelbereich von $10 - 20^\circ$ ausschließlich für die innenliegenden Materialien 2 und 3. Ebenso wie beim Bi- und Trimaterialkerb scheinen also vor allem dünne Sektoren insbesondere um den Riss oder Kerb herum die Singularitätsordnung zu verstärken. Auffallend ist, dass die maximalen Singularitätsordnungen

aller Anordnungen schwächer sind als die stärkste Singularitätsordnung für den Trimaterialkerb. Die Werte liegen eher im Wertebereich des Maximalwerts für den Bimaterialkerb.

Vergleicht man die Ergebnisse für die unterschiedlichen Konfiguration (siehe Tabelle 6), so wird ersichtlich, dass mit jedem weiteren Material die Singularitätsordnung weiter ansteigt und somit wäre für einen Viermaterialkerb eine stärkere Singularitätsordnung zu erwarten. Bei genauer Betrachtung macht es jedoch durchaus Sinn, dass innerhalb der möglichen Anordnungen des berechneten Viermaterialkerbs keine stärkere Singularitätsordnung als für den Trimaterialkerb auftritt. Denn die Konfigurationen, die beim Trimaterialkerb zu starken Singularitätsordnungen führen, sind ja solche, bei denen jeweils dünne Schichten eines steifen Materials um den Riss oder Kerb herum einen großen Bereich von weichem Material einschließt. Beim Bimaterialkerb ist diese Anordnung ebenso wie bei den betrachteten Varianten des Viermaterialkerbs nicht möglich. Wenn die Faktoren, die scheinbar zu den stärksten Singularitätsordnungen führen einerseits starke Unterschiede in den Materialeigenschaften sind und andererseits dünne Bereiche von relativ steifem Material um den Riss oder Kerb herum, ist bei einer geraden Anzahl von Materialsektoren mit den vorgegeben Einschränkungen keine ähnlich kritische Konfiguration wie für den Trimaterialkerb möglich. Aus den durchgeführten Untersuchungen liegt der Schluss nahe, dass eine Analyse ohne die Vorgabe, dass nebeneinander liegende Sektoren unterschiedliche Materialeigenschaften haben müssen und ohne die Beschränkung der zulässigen Elastizitätsmoduli auf die Werte 2.100 MPa und 210.000 MPa genau zu dem bereits ermittelten Maximalwert der Trimaterialkonfigurationen führt. Weiterhin legen die Ergebnisse des vorigen Abschnitts nahe, dass unter Konfigurationen, bei denen die vier Sektoren tatsächlich unterschiedliche Materialeigenschaften besitzen, solche, bei denen die beiden innenliegenden Materialien 2 und 3 zwar nicht die gleichen, aber noch sehr ähnliche Materialeigenschaften besitzen und somit den Trimaterialkerb Konfigurationen sehr nahe kommen, die stärksten Singularitätsordnungen ergeben. Im Hinblick auf einen Multimaterialkerb mit weiteren Materialien ist aus den Ergebnissen nicht zu erwarten, dass Singularitätsordnungen den Maximalwert des Trimaterialkerbs wesentlich übersteigen. Als weiterführende Untersuchung wäre sicherlich zunächst interessant zu prüfen, ob für einen Multimaterialkerb mit 5 Materialien noch leicht stärkere Singularitätsordnungen auftreten als für den Trimaterialkerb - beispielsweise bei einer Anordnung wie in Abbildung 35 dargestellt - oder ob der Maximalwert des Trimaterialkerbs für die gewählten Bereiche der Materialwerte das Maximum auch für eine höhere Anzahl an Materialien darstellt. Die Untersuchung von Singularitätsordnungen für andere Materialdaten kann für weitere Untersuchungen gegebenenfalls auch interessant sein, wobei die hier gewählten Wertebereiche der Elastizitätsmoduli die Materialdaten von

technisch relevanten isotropen Werkstoffen gut abbilden und damit der interessanteste Wertebereich von Multimaterialkerben für die Praxis abgedeckt ist.

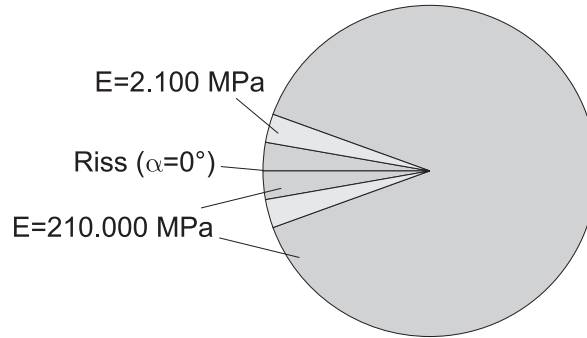


Abbildung 35: Multimaterialkerb mit 5 Sektoren.

4.4 Dreidimensionale Konfigurationen

Die Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen für dreidimensionale Konfigurationen ist wie bereits erwähnt deutlich aufwendiger als für zweidimensionale Konfigurationen. Zum einen ist die Rechenzeit für einzelne Rechnungen bereits länger und für Parameterstudien und Optimierung mit mehreren Rechnungen der Aufwand entsprechend höher. Zum anderen wurde bei der Analyse von dreidimensionalen Konfigurationen im Rahmen dieser Arbeit deutlich, dass eine Optimierung bezüglich geometrischer Parameter nur mit einem sehr hohen Aufwand für die Generierung mehrerer Netze oder einer sehr bedacht gewählten Vernetzung und Parametrisierung eines Netzes erfolgen kann. In diesem Abschnitt werden daher keine ausführlichen Analysen dargelegt, sondern das Vorgehen und mögliche Schwierigkeiten bei der Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen von dreidimensionalen Konfigurationen erläutert.

Im Hinblick auf die Analyse von Singularitätsordnungen ist oft der Ausgangspunkt eine bestehende oder in der Konstruktion angedachte Struktur, die bruchmechanisch bewertet werden soll. Ein anderer Ansatzpunkt ist die gezielte Suche nach besonders starken Singularitätsordnungen beziehungsweise Konfigurationen, bei denen solche vorliegen. Da insbesondere im dreidimensionalen Raum eine große Menge an denkbaren Multimaterialkonfigurationen mit geometrischen und materiellen Diskontinuitäten existiert und Untersuchungen aus Kapitel 3 gezeigt haben, dass Singularitätsordnungen in dreidimensionalen Multimaterialkonfigurationen komplex sein können und sich nicht leicht pauschale Aussagen treffen lassen, ist eine vollständige Untersuchung von allen theoretisch denkbaren dreidimensionalen Multimaterialkonfigurationen kaum möglich. Im Hinblick auf

das gezielte Aufdecken von Konfigurationen mit starken Singularitätsordnungen kann letztendlich nur eine Auswahl an Situationen getroffen werden, deren Analyse sinnvoll erscheint. Liegen in mehreren solcher Konfigurationen keine Singularitätsordnungen über einem bestimmten Wert vor, so kann aber trotzdem nicht mit Sicherheit ausgeschlossen werden, dass stärkere Werte in nicht untersuchten Konfigurationen vorliegen.

Bei dreidimensionalen Konfigurationen ist die Suche nach starken Singularitätsordnungen vom mechanischen Gesichtspunkt her interessant, da die Singularitätsordnungen theoretisch aus energetischen Gründen Werte von bis zu $-1,5$ annehmen können, wohingegen sie im Zweidimensionalen bis -1 beschränkt sind. Beim zweidimensionalen Multimaterialkerb treten bereits Werte auf, die sehr nah am theoretischen Grenzwert liegen. Daher wäre es möglich, dass im Dreidimensionalen auch bei einigen einfachen und naheliegenden Konfigurationen sehr starke Singularitätsordnungen im Bereich zwischen -1 und $-1,5$ gefunden werden könnten.

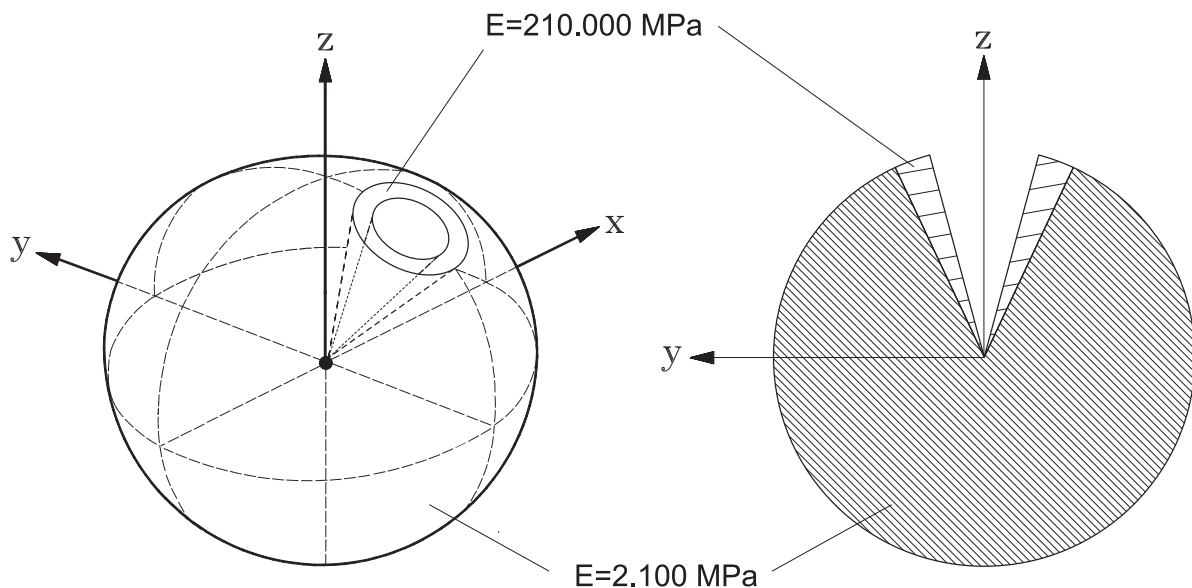


Abbildung 36: Dreidimensionaler Kegelriss in einer Mehrschichtkonfiguration.

Ein Ausgangspunkt für die Auswahl von Konfigurationen sind hierbei die bereits vorliegenden Ergebnisse. So führt das Vorliegen eines Risses auch in dreidimensionalen Multimaterialkonfigurationen sicher eher zu stärkeren Werten als die Abwesenheit von geometrischen Diskontinuitäten. Aus den kritischen Konfigurationen des Trimaterialkerbs können verschiedene Ansatzpunkte auf dreidimensionale Konfigurationen übertragen werden. So ist beispielsweise eine Konfiguration, die in Betracht gezogen wurde, ein spitzkegelförmiger Riss in einem Festkörperkontinuum aus weichem Material, der von

einer dünnen Schicht aus steifem Material umgeben ist (siehe Abbildung 36). Die Anordnung einer dünnen Schicht von steifem Material um einen Riss, die einen großen Bereich von weichem Material einschließt, führte beim Trimaterialkerb zu den kritischsten Singularitätsordnungen. Die Konfiguration aus Abbildung 36 überträgt dies ins Dreidimensionale. Ebenso ist aber eine Konfiguration denkbar, bei der ein Riss in der x-y-Ebene liegt, mit beliebigem Öffnungswinkel in der Ebene, umgeben von einer dünnen Schicht steifen Materials in einem Kontinuum weichen Materials. Diese Konfiguration ist in Abbildung 37 dargestellt. Für diese werden im Folgenden keine Ergebnisse dargestellt, sie soll lediglich illustrieren, welche Probleme, die bei der Vernetzung solcher Konfigurationen auftreten können. Die Schwierigkeit hier ist nun, dass sich für allgemeine dreidimensionale Anordnungen Materialparameter über die direkte Eingabe im Input-File nach wie vor sehr leicht variieren lassen, eine Veränderung einer geometrischen Größe aber stets ein neues Netz oder eine geschickte Parametrisierung eines Netzes erfordert. Bei der Konfiguration aus Abbildung 37 ist beispielsweise der Winkel der Rissfläche in der x-y-Ebene variierbar. Der Riss wird diskretisiert, indem entlang des Kugeläquators Doppelknoten eingeführt werden. Je nach gewünschter Schrittweite bei der Variation der Rissfläche muss der Bereich entsprechend fein vernetzt werden um solche Variationen zu erlauben (also sind beispielsweise für eine Schrittgröße von 5° für den Rissflächenwinkel entlang des Äquators 72 C2-Elemente erforderlich). Die Variation des Winkels erfordert mehr Aufwand als die Variation eines Materialparameters, ist jedoch mit einer Vernetzung durchführbar. Der andere geometrische Parameter, der in dieser Konfiguration von Interesse ist, ist der Sektorwinkel der dünnen Schicht. Dieser liegt in der Skizze bei 10° auf jeder Seite der Rissebene. Für eine umfassende Untersuchung der Konfiguration ist jedoch die Variation des Bereichs mit steifem Material und daher die des Sektorwinkels interessant. Dies lässt sich nicht mit einem einzigen Netz realisieren, wenn ein sinnvolles Winkelspektrum abgedeckt werden soll. Für einen kleinen Winkelbereich des steifen Materials reichen wenige Elemente aus, um diesen Bereich zu diskretisieren. Bei einer leichten Veränderung des Winkels kann die Elementgröße entsprechend angepasst werden, bei einer größeren Veränderung des Winkels muss jedoch die Elementzahl in dem Winkelbereich angepasst werden. Insgesamt ist eine mögliche Strategie für dieses Problem bei dieser Konfiguration, Elemente in Ringen parallel zur x-y-Ebene festzulegen. Wenn hier das Winkelspektrum mit einer sinnvollen Schrittgröße abgedeckt werden soll, muss das gesamte Netz jedoch sehr fein gestaltet werden, was zu einem sehr hohen Rechenaufwand führt. Andernfalls ist eine Variation des Sektorwinkels nur unter relativ hohem Aufwand für die Vernetzung möglich. Weiterhin können die Übergänge von feinerer Vernetzung zu gröberer Vernetzung zu Schwierigkeiten führen. Da bei den meisten dreidimensionalen Konfigurationen für eine sinnvolle Variation von Parametern solche

Schwierigkeiten auftreten, ist im Rahmen dieser Arbeit für dreidimensionale Konfigurationen keine detaillierte Parametervariation bei der Suche nach starken Singularitäten erfolgt, sondern überwiegend eine stichprobenhafte Berechnung von potentiell interessant scheinenden Konfigurationen. Bei diesen Untersuchungen konnten bislang keine Konfigurationen aufgedeckt werden, deren Singularitätsordnung im Bereich von -1 und $-1,5$ liegt, was aber wie oben erwähnt keine festen Rückschlüsse auf das Auftreten solcher Werte in anderen Konfigurationen liefert.

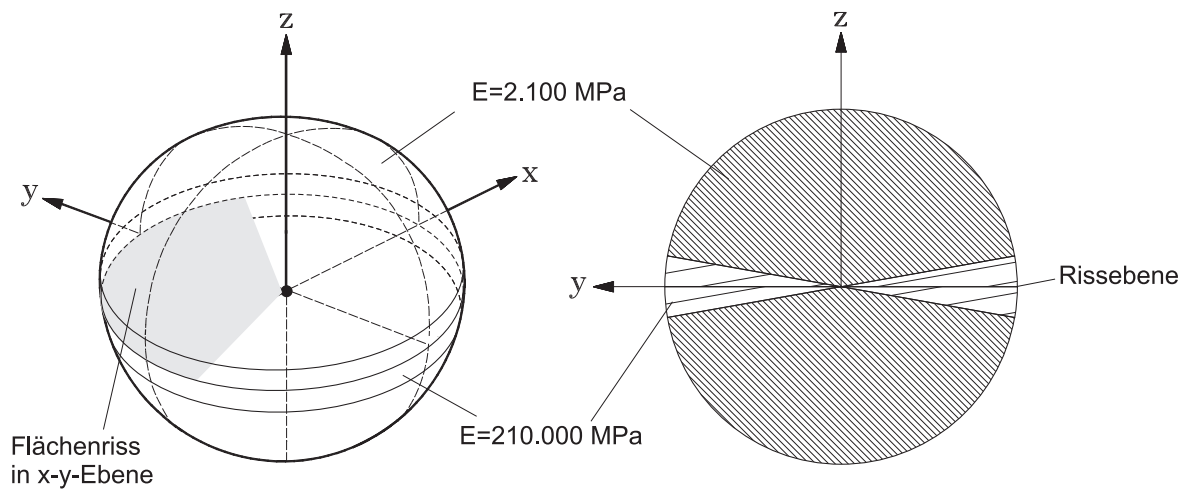


Abbildung 37: Dreidimensionaler Flächenriss in einer Mehrschichtkonfiguration.

Für die Konfiguration aus Abbildung 36 ergibt sich beispielsweise für die Materialdaten $E = 210.000 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,3$ für das steife Material und $E = 2.100 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,3$ für das weiche Material und einen Rissöffnungswinkel von 30° und einen Winkelbereich von 10° für die dünne Schicht eine Singularitätsordnung von circa $-0,7$. Dies ist zwar eine kritische Singularitätsordnung, die bei einer Konfiguration in jedem Fall beachtet werden sollte, aber im Vergleich zu dem im zweidimensionalen Trimaterialkerb auftretenden Wert kein spektakuläres Ergebnis.

Ein weiterer Anhaltspunkt aus dem Trimaterialkerb ist das Aufeinandertreffen von verschiedenen Materialsektoren mit unterschiedlichen Materialeigenschaften in einem Punkt. Dies kann beispielsweise in einer Konfiguration wie der sogenannten Fichera-Ecke (siehe Abbildung 38) aufgegriffen werden. Diese wurde für homogenes Material und für Bimaterialkonfigurationen beispielsweise von Longeru u. a. [63] analysiert. Ein möglicher Ansatz ist nun, hier verschiedene Materialsektoren im Ähnlichkeitszentrum aufeinandertreffen zu lassen. Dies lässt sich für eine feste Konfiguration noch relativ leicht durchführen – beispielsweise wurden Analysen durchgeführt, bei denen jedem Achtel des Kugelgebiets unterschiedliche Materialeigenschaften zugewiesen wurden. Für

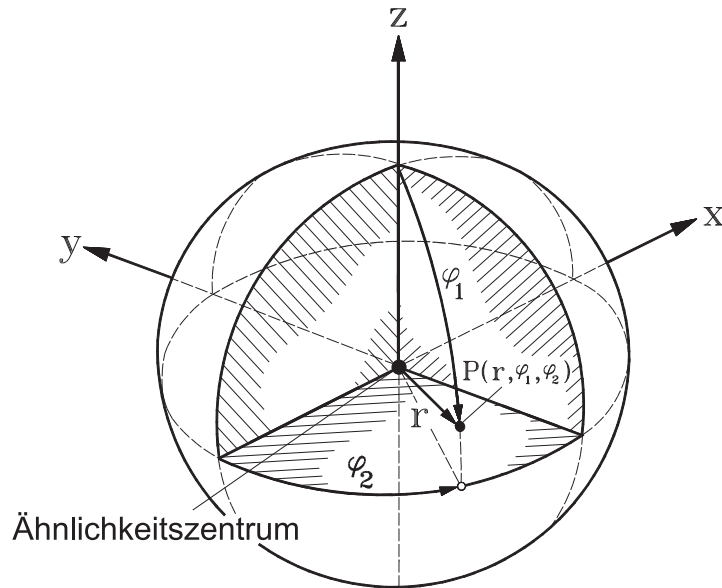


Abbildung 38: Dreidimensionale Fichera-Ecke.

beliebig variable Sektorenbereiche, die letztendlich am interessantesten sind, ist jedoch die Durchführung wieder sehr aufwendig. Für die Fichera-Ecke ergeben sich im homogenen Fall ebenso wie im Bimaterialfall Singularitätsordnungen annähernd vom Betrag der Rissspitzensingularität. Für die Zuweisung von unterschiedlichen Materialsektoren pro Achtelkugel ergibt sich für isotrope Materialien eine Singularitätsordnung von circa $-0,6$. Hierbei werden für alle Bereiche die Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$ gewählt und der Elastizitätsmodul beträgt für nebeneinander liegende Bereiche abwechselnd $E = 2.100 \text{ MPa}$ und $E = 210.000 \text{ MPa}$. Die Singularitätsordnung wird also im Vergleich zum homogenen Fall oder auch zur Bimaterialkonfiguration leicht verstärkt, ist aber im Bezug auf die theoretisch möglichen Maximalwerte im Dreidimensionalen wieder kein herausragendes Ergebnis.

Insgesamt ist es von Interesse, dreidimensionale Konfigurationen im Hinblick auf die gezielte Ermittlung von sehr starken Singularitätsordnungen weiter zu untersuchen. Die bisherigen Analysen liefern hierbei einige Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen. Allgemein lassen sich diese Untersuchungen gut mit der Rand-Finite-Elemente-Methode durchführen, jedoch ist zur ausführlichen Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen von dreidimensionalen Konfigurationen eine Minimierung der Rechenzeit der verwendeten Implementierung ebenso wie die weitere Forschung zu geeigneten Vernetzungsstrategien sinnvoll.

4.5 Fazit

Mithilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode lassen sich gezielte Analysen zur Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen für eine Konfiguration mit gegebenen Wertebereichen der variablen Parameter durchführen. Dies kann zum einen durch Parameterstudien realisiert werden, bei denen der Einfluss einzelner Parameter auf die Singularitätsordnung untersucht wird. Sofern sich ein klarer Zusammenhang erkennen lässt und die Singularitätsordnung beispielsweise immer monoton mit einem Parameter zunimmt, kann dies genutzt werden, um anschließend einen anderen Parameter zu variieren und so schrittweise das Maximum der Singularitätsordnung für alle Parameter zu suchen. Da sich nicht für alle Parameter so ein klarer monotoner Zusammenhang herstellen lässt, sondern die Singularitätsordnung über den Wertebereich eines Parameters oft auch ohne klar erkennbare Regel zu- und abnimmt, muss in der Regel der gesamte zulässige Wertebereich betrachtet werden. Für mehrere Parameter ist hier meist ein stochastisches Optimierungsverfahren am besten geeignet. Da die Variation von mehreren Größen insbesondere bei geometrischen Parametern, die eine Erstellung von neuen Netzen oder eine geschickte Parametrisierung eines Netzes erfordern, schnell sehr aufwendig werden kann, ist es nützlich, alle Erkenntnisse, die den Wertebereich einschränken, zu nutzen.

Bei den untersuchten zweidimensionalen Multimaterialkerben wird deutlich, dass bereits für recht einfache Konfigurationen sehr starke Singularitätsordnungen auftreten können, wenn sowohl geometrische als auch materielle Diskontinuitäten vorliegen. Hierbei muss jedoch nicht einmal ein Riss vorhanden sein, allein das Aufeinandertreffen von Materialsektoren mit unterschiedlichen Materialeigenschaften führt bereits teilweise zu sehr starken Singularitätsordnungen.

Für dreidimensionale Situationen ist die Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen allgemein sinnvoll, da theoretisch noch stärkere Singularitätsordnungen als im Zweidimensionalen auftreten können. Das Aufdecken von Konfigurationen, bei denen solche Werte auftreten, ist von großem Interesse. Die untersuchten zweidimensionalen Multimaterialkonfigurationen liefern Ansatzpunkte zur Auswahl von potentiell interessanten Konfigurationen im Raum. Erste Analysen von dreidimensionalen Konfigurationen zeigen jedoch, dass die Variation von geometrischen Parametern mit einem gewissen Aufwand für Netzerstellung und Rechenzeit verbunden ist, der zur umfassenden Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen von verschiedenen dreidimensionalen Konfigurationen noch verringert werden muss.

5 Analyse von zwei- und dreidimensionalen piezoelektrischen Konfigurationen

Dieses Kapitel ist der Untersuchung von piezoelektrischen Konfigurationen gewidmet. Hierbei werden die Singularitätsordnungen für einige zwei- und dreidimensionale Situationen untersucht. Nach einem Abschnitt zur Modellierung für piezoelektrisches Materialverhalten folgen einige Analysen von Multimaterialkonfigurationen mit piezoelektrischen Materialien. Hierbei liegt der Fokus einerseits auf der allgemeinen Qualität der Ergebnisse für piezoelektrische Konfigurationen und der Eignung der Methode zur Analyse solcher Konfigurationen. Zum anderen werden Konfigurationen aus Kapitel 3 erneut für piezoelektrisches Materialverhalten analysiert, um einen direkten Vergleich von Singularitätsordnungen für linear-elastisches und für piezoelektrisches Materialverhalten zu ermöglichen.

5.1 Modellbildung für piezoelektrische Materialien

Zur Untersuchung von Konfigurationen mit piezoelektrischem Materialverhalten wurde ebenso das am Fachgebiet Strukturmechanik der TU Darmstadt entwickelte Programm Caesar verwendet. Die Implementierung von Artel enthält bereits die Erweiterung für piezoelektrisches Materialverhalten und wurde im Rahmen seiner Arbeiten (siehe [1], [2]) bereits grundlegend verifiziert. Im Rahmen dieser Arbeit wurde weiterhin vor der Modellierung komplexerer Konfigurationen zur Überprüfung des elektrischen Verhaltens beispielsweise ein Plattenkondensator unter Vorgabe einer Potentialdifferenz berechnet.

Die Vernetzung für piezoelektrisches Materialverhalten erfolgt analog zum linear-elastischen Fall mit C2E-Schalenelementen beziehungsweise C4E-Kontinuumselementen. Diese besitzen nun zusätzlich zu den Freiheitsgraden für die Verschiebungskomponenten noch einen Freiheitsgrad für das elektrische Potential. Die Anordnung der Knoten und die Gauss-Integration sind unverändert. Die Anforderungen an die Netze verändern sich für das piezoelektrische Materialverhalten zur Ermittlung der Singularitätsordnungen nicht, Erkenntnisse zur nötigen Beschaffenheit und Genauigkeit der Netze können auf Konfigurationen mit piezoelektrischem Materialverhalten übertragen werden.

Grundsätzlich sind bei linear-elastischen Strukturen im Hinblick auf starke Beanspruchungen und Versagen nur Singularitäten bei den mechanischen Spannungen von Interesse. Bei einer rein elektrischen Struktur gibt es hingegen dielektrisches Versagen. Analog zu den Spannungen sind hier – wie in Abschnitt 2.3 aufgeführt – Singularitäten bei

der dielektrischen Verschiebung beziehungsweise einzelnen Komponenten dieser Größe von Interesse. In piezoelektrischen Strukturen, bei denen mechanisches und elektrisches Materialverhalten nun gekoppelt ist, kann dann sowohl dielektrisches als auch mechanisches Versagen auftreten. Im Vergleich zu rein mechanischen Strukturen stellt sich nun nicht nur die Frage, ob die Struktur kritisch beansprucht ist und wann Versagen eintritt, sondern auch ob zuerst mechanisches oder zuerst elektrisches Versagen eintritt. Dies ist bei der bruchmechanischen Bewertung von piezoelektrischen Strukturen ein wichtiger Punkt. Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus jedoch auch für piezoelektrische Strukturen auf der Analyse der Singularitätsordnungen von Multimaterialkonfigurationen.

Bezüglich der berechneten Singularitätsordnungen sei angemerkt, dass diese für piezoelektrisches Materialverhalten, bei dem die Kopplung existiert (also mindestens ein Eintrag der piezoelektrischen Matrix \mathbf{e} nicht verschwindet), stets sowohl für die Spannungen als auch für die dielektrische Verschiebung in Richtung der Polarisierung – im Folgenden immer in z - bzw. 3-Richtung – gelten.

5.2 Laminatcke am freien Rand

Als erstes wurde eine dreidimensionale Ecke eines Laminats auf zwei orthotropen Schichten untersucht. Wie in Abbildung 39 dargestellt treffen hier an der Ecke zwei freie gerade Ränder des Laminats unter einem beliebigen Ecköffnungswinkel γ aufeinander. Das Interface zwischen den Materialien liegt in der x - y -Ebene, im Bereich $z \geq 0$ befindet sich Material 1, im Bereich $z \leq 0$ Material 2. Die Situation wird wieder mit einer Kugel beziehungsweise einem entsprechenden Teil davon modelliert, in deren Mittelpunkt das Ähnlichkeitszentrum gelegt wird. An diesem Punkt treffen zwei linienartige Diskontinuitäten, nämlich die beiden Interfaces am freien Rand des Laminats, aufeinander. Die Ecke mit einem Öffnungswinkel 90° liegt genau im Quadranten $x \geq 0, y \geq 0$, kleinere oder größere Öffnungswinkel liegen dann symmetrisch innerhalb oder außerhalb dieses Quadranten. Die z -Achse ist senkrecht zu den Einzelschichtebenen, der Winkel $\vartheta = 0^\circ$ ist der Lage zugeordnet, bei der die Fasern in Richtung der x -Achse liegen. Ein positiver Wert von ϑ bedeutet die Schicht ist in Richtung von φ_2 verdreht, ein negativer Wert von ϑ entsprechend in die entgegengesetzte Richtung.

Die Vernetzung erfolgt wieder nur auf der Oberfläche der Teilkugel, ein exemplarisches Netz für den Öffnungswinkel 90° ist in Abbildung 40 dargestellt. Hierbei wurden 96 C4-Elemente verwendet. Die Anzahl der Elemente variiert für andere Öffnungswinkel.

Allgemein ist für diese Konfiguration zum einen die Variation der Materialdaten und zum anderen die des Öffnungswinkels von Interesse. Da hier nun orthotrope Schichten

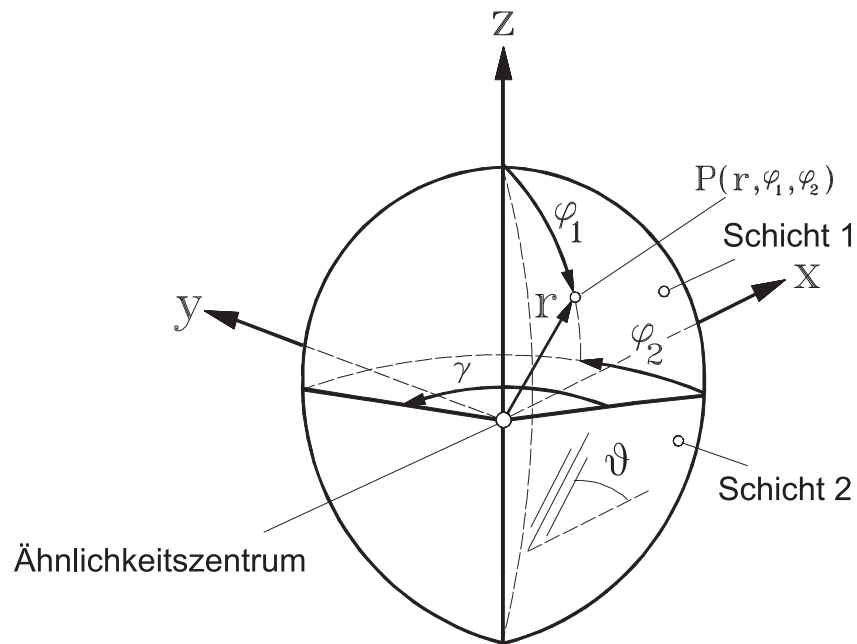


Abbildung 39: Zwei in einer Ecke mit beliebigem Öffnungswinkel aufeinander treffende gerade freie Ränder eines Laminats aus zwei orthotropen Schichten.

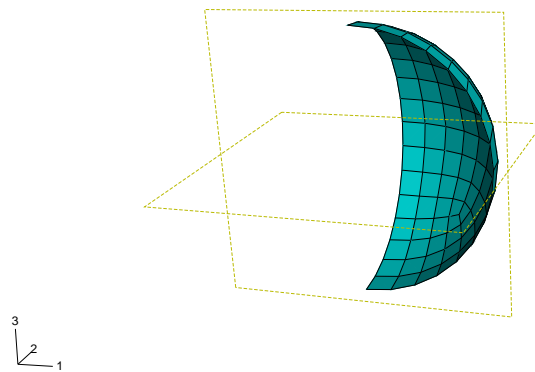


Abbildung 40: RFEM-Diskretisierung mit C4-Elementen für zwei in einer Ecke mit Öffnungswinkel 90° aufeinander treffende gerade freie Ränder eines Laminats aus zwei orthotropen Schichten.

untersucht werden, ist eine wichtige Stellschraube der Lagenaufbau des Laminats. Daher werden für die folgenden Untersuchungen feste Materialwerte gewählt und nur der Lagenwinkel der beiden Schichten variiert. Dabei werden die technisch relevanten Lagenaufbauten eines Winkelverbunds – also eines Verbunds mit dem Aufbau $[\pm\vartheta]$ – und eines Verbunds mit dem Aufbau $[0^\circ/\vartheta]$ untersucht. Hierbei bezieht sich der jeweils erste Winkel auf die Material 1-Schicht und der zweite auf die Material 2-Schicht. Insgesamt ist sicher auch eine Variation der Materialwerte selbst interessant, einen Hinweis auf den Einfluss der Materialwerte liefern jedoch bereits die vorherigen Untersuchungen (so ist auch hier zu erwarten dass stark unterschiedliche Materialdaten zu stärkeren Singularitätsordnungen führen), so dass hier die Untersuchungen der Winkel im Vordergrund stehen.

Zunächst wurde für den Öffnungswinkel 90° für das erstellte Netz eine Vergleichsrechnung mit vorhandenen Ergebnissen durchgeführt. Dazu wurden rein isotrope Materialien verwendet. Für Material 1 wurden die Materialdaten $E_1 = 210.000$ MPa und $\nu_1 = 0,3$ gewählt, für Material 2 wurden für die Werte 2.100 MPa, 50.000 MPa, 120.000 MPa und 210.000 MPa für den Elastizitätsmodul E_2 jeweils die Querkontraktionszahlen im Bereich 0 bis 0,49 mit einer Schrittgröße von $\Delta\nu_2 = 0,02$ variiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 41 dargestellt. Alle Eigenwerte sind hierbei rein reell. Für $E_2 = 210.000$ MPa ist die Konfiguration homogen und es treten keine Eigenwerte im relevanten Bereich auf, für $E_2 = 2.100$ MPa liegen für hohe Querkontraktionszahlen Singularitätsordnungen von bis zu $-0,4$ vor. Dies stimmt mit Ergebnissen beispielsweise von Mittelstedt [69] überein.

Als nächstes wurden für rein linear-elastisches orthotropes Materialverhalten verschiedene Eckwinkel untersucht. Als Material für beide Schichten wird wieder der Werkstoff T300/Epoxy verwendet, die Materialdaten sind in Tabelle 5 in Abschnitt 3.3.1 angegeben. Für dieses Material wurde nun der Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ untersucht indem der Winkel ϑ , der hier die Lage von Material 2 beschreibt, im Bereich von 0° bis 90° in Schritten von $\Delta\vartheta = 5^\circ$ variiert wurde. Die Ergebnisse für die Ecköffnungswinkel 90° , 120° und 150° sind in Abbildung 42 dargestellt. Hierbei sei erwähnt, dass für den Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ für positive und negative Winkel vom gleichen Betrag dieselben Singularitätsordnungen auftreten und daher nur die Singularitätsordnungen für positive Winkel dargestellt sind. Dies ist jedoch für andere Lagenaufbauten in der Regel nicht der Fall, wie Mittelstedt [69] bei der Untersuchung der Laminatcke mit anderen Materialdaten und Lagenaufbauten festgestellt hat.

Insgesamt sind die auftretenden Singularitätsordnungen für die unterschiedlichen Öffnungswinkel relativ ähnlich. Die Beträge unterscheiden sich zwar, aber in einem sehr engen Wertebereich. Einen größeren Einfluss hat für jeden Öffnungswinkel der Lagenwin-

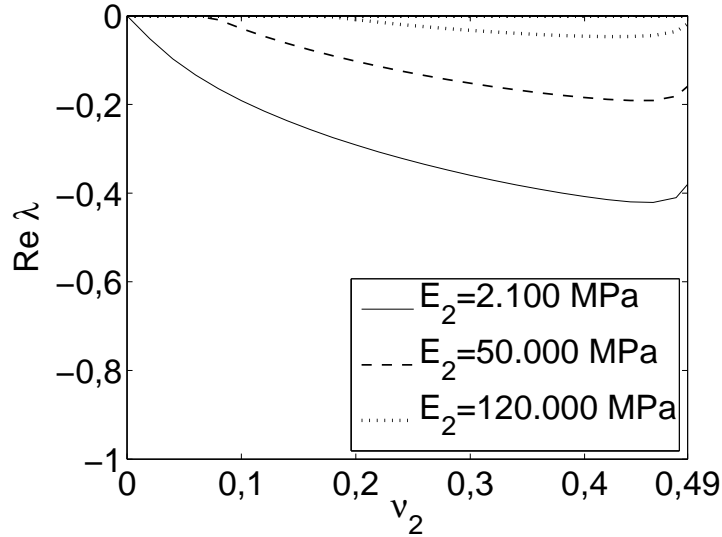


Abbildung 41: Singularitätsordnungen für zwei in einer Ecke mit Öffnungswinkel 90° aufeinander treffende gerade freie Ränder eines Laminats aus zwei isotropen Schichten mit $E_1 = 210.000 \text{ MPa}$ und $\nu_1 = 0,3$ für verschiedene Werte von E_2 in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν_2 .

kel ϑ der Schicht mit Material 2. Liegt für den Wert $\vartheta = 0^\circ$ und im umliegenden Bereich keine Singularität vor, so tritt die maximale Singularitätsordnung für den Winkel 90° beziehungsweise -90° auf. Die Singularitätsordnung ist hier also nicht vorhanden, wenn die Konfiguration homogen oder die Lagenwinkel sehr ähnlich sind, und wird maximal, wenn ein Kreuzverbund vorliegt bei dem die Faserrichtungen senkrecht zueinander sind. Es sei erwähnt dass der Fall eines Öffnungswinkels von 180° einem freien Rand eines Laminats entspricht, für das bekanntlich der Laminat-Randeffekt mit einer Singularität in der z-Komponente der Spannungen auftritt. Insgesamt sind die Singularitätsordnungen für die gewählten Materialdaten und die untersuchten Ecköffnungswinkel jedoch nicht sehr stark.

Anschließend wurde für die Ecke mit einem festen Öffnungswinkel von 90° sowohl der Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ als auch der Winkelverbund untersucht. Hierbei wurde der Lagenwinkel ϑ von Material 2 im Bereich von 0° bis 90° jeweils wieder in Schritten von $\Delta\vartheta = 5^\circ$ untersucht. Die Analysen wurden nun einmal für rein linear-elastisches Material mit den Materialdaten von T300/Epoxy durchgeführt. Darauf folgend wurde die gleiche Situation mit piezoelektrischen Materialdaten untersucht. Hier wurden weiterhin die mechanischen Eigenschaften von T300/Epoxy verwendet sowie die elektrischen und piezoelektrischen

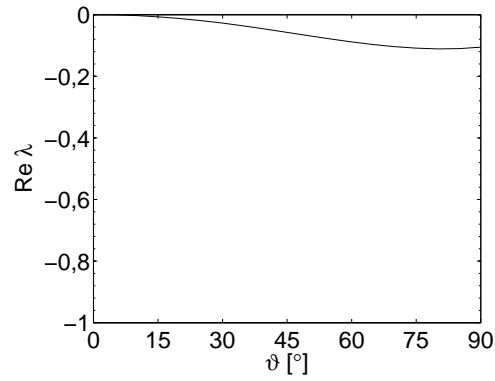
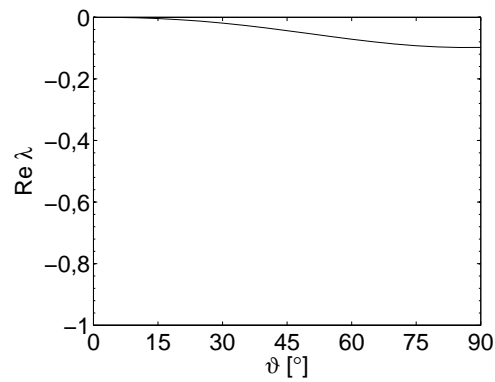
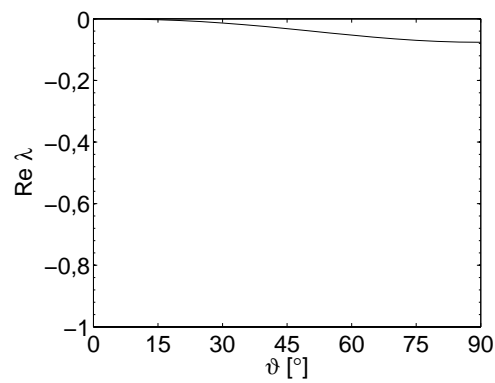
Singularitätsordnungen für den Ecköffnungswinkel 90° Singularitätsordnungen für den Ecköffnungswinkel 120° Singularitätsordnungen für den Ecköffnungswinkel 150°

Abbildung 42: Singularitätsordnungen für zwei in einer Ecke mit verschiedenen Öffnungswinkeln aufeinander treffende gerade freie Ränder eines Laminats aus zwei orthotropen Schichten mit den Materialdaten von T300/Epoxy und einem Lagenaufbau von $[0^\circ/\vartheta]$ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

Materialwerte von PZT-5A, also einer Piezokeramik aus Blei-Zirkonat-Titanat. Diese Materialdaten entsprechen zwar in dieser Kombination keinem tatsächlichen Werkstoff, dennoch liefert auch diese fiktive Kombination einen Einblick in das qualitative Geschehen für eine piezoelektrische Konfiguration. Von Vorteil bei dieser Wahl ist die Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen für rein linear-elastische Konfigurationen mit den gleichen mechanischen Materialeigenschaften. Die Materialwerte für PZT-5A sind wie folgt:

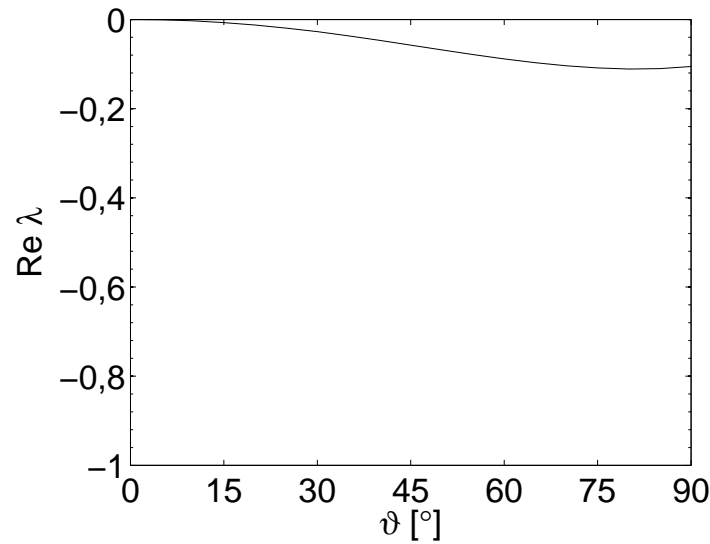
$$\begin{aligned} e_{31} = e_{32} &= -5,4 \text{ C/m}^2, & e_{33} &= 15,8 \text{ C/m}^2, & e_{24} = e_{15} &= 12,3 \text{ C/m}^2, \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} &= 1730\epsilon_0, & \epsilon_{11} &= 1700\epsilon_0, & \epsilon_0 &= 8,859 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Vm}. \end{aligned}$$

Alle weiteren nicht definierten Komponenten der piezoelektrischen Matrix \mathbf{e} und der Matrix der dielektrischen Konstanten ϵ sind null.

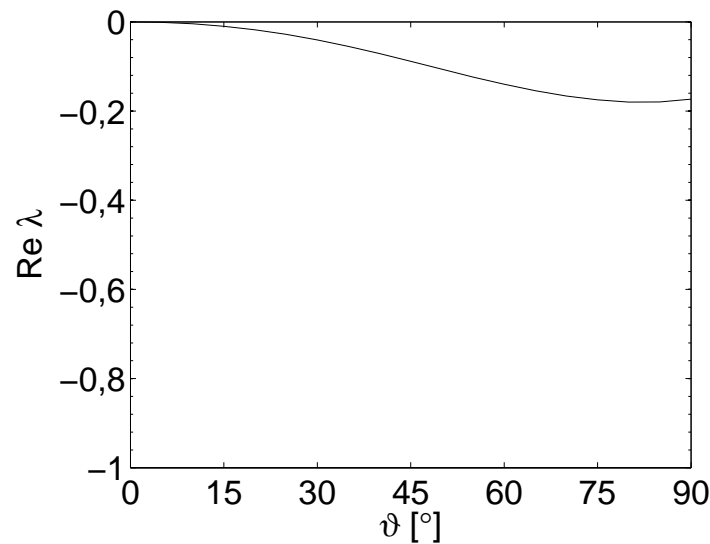
Die Ergebnisse für diese Untersuchungen bei der 90°-Ecke sind in Abbildung 43 für den Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und in Abbildung 44 für den Winkelverbund $[\pm\vartheta]$ jeweils für rein linear-elastisches und für piezoelektrisches Materialverhalten dargestellt.

Die Singularitätsordnungen für die 90°-Ecke und den Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ mit den Materialeigenschaften von T300/Epoxy finden sich bereits in Abbildung 42 und wurden nur zum besseren Vergleich hier noch einmal eingefügt. Die Ergebnisse für die gleiche Situation mit den aufgeführten piezoelektrischen Materialdaten ist qualitativ sehr ähnlich. Im linken Bereich, also für Konfigurationen, in denen Schicht 2 längs der x-Achse ausgerichtet ist, verschwinden die Singularitätsordnungen. Für den Wert $\vartheta = 90^\circ$, also den Fall des Kreuzverbunds, und den umliegenden Bereich werden die Singularitätsordnungen maximal. Im Vergleich zu den Resultaten für rein linear-elastisches orthotropes Materialverhalten fällt auf, dass die Kurve für piezoelektrisches Materialverhalten etwas steiler ist. Somit ist für jeden Winkel der Betrag jeweils bei der piezoelektrischen Konfiguration etwas größer. Die Maximalwerte der ermittelten Singularitätsordnungen liegen hier für den rein linear-elastischen Fall bei ungefähr $-0,1$ und für den piezoelektrischen Fall bei circa $-0,17$.

Bei den Ergebnissen für den Winkelverbund, also einen Lagenaufbau von $[\pm\vartheta]$, im linear-elastischen Fall verschwinden die Singularitätsordnungen wie zu erwarten für den Fall $\vartheta = 0^\circ$ und ebenso für den Fall $\vartheta = 90^\circ$. In beiden Fällen liegen die Faserrichtungen der beiden Schichten parallel. Der Maximalwert der ermittelten Singularitätsordnungen tritt wie beim vorher untersuchten Lagenaufbau auf, wenn die Lagenwinkel maximal unterschiedlich sind. Dies ist hier der Fall für $\vartheta = 45^\circ$ und den naheherum liegenden Bereich, da dort die Fasern der Schichten mit einer Ausrichtung von 45° und -45° senkrecht zueinander liegen. Die Singularitätsordnung in diesem Fall ist mit einem Betrag

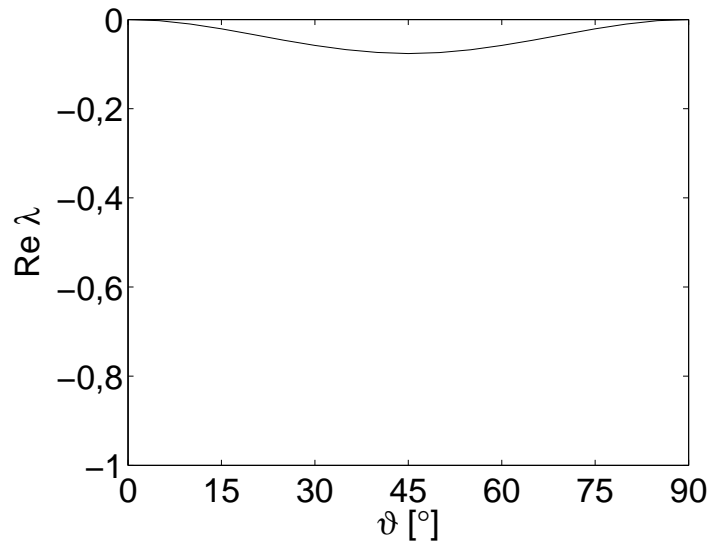


Singularitätsordnungen für orthotropes Materialverhalten
mit den Materialdaten von T300/Epoxy

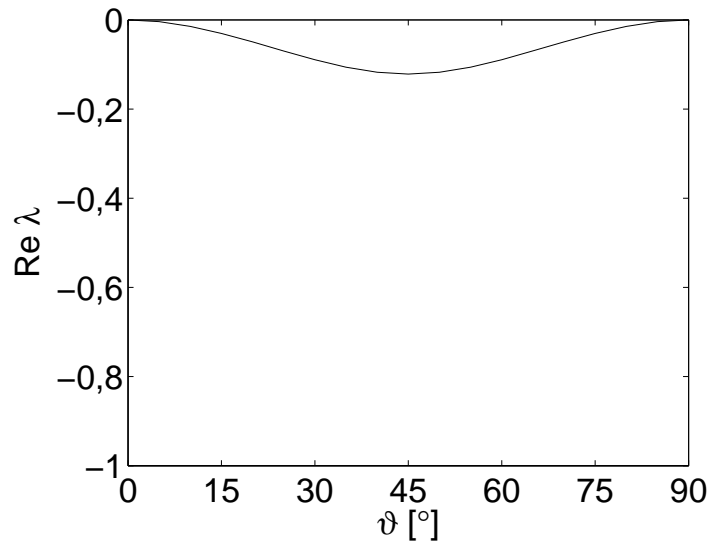


Singularitätsordnungen für piezoelektrisches Materialverhalten
mit den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A

Abbildung 43: Singularitätsordnungen für zwei in einer Ecke mit Öffnungswinkel 90° aufeinander treffende gerade freie Ränder eines Laminats aus zwei Schichten mit einem Lagenaufbau von $[0^\circ/\vartheta]$ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ



Singularitätsordnungen für orthotropes Materialverhalten
mit den Materialdaten von T300/Epoxy



Singularitätsordnungen für piezoelektrisches Materialverhalten
mit den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A

Abbildung 44: Singularitätsordnungen für zwei in einer Ecke mit Öffnungswinkel 90° aufeinander treffende gerade freie Ränder eines Laminats aus zwei Schichten mit einem Lagenaufbau von $[\pm\vartheta]$ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ

von ungefähr $-0,08$ sehr schwach. Der Maximalwert unterscheidet sich von dem Betrag im vorher untersuchten Lagenaufbau, was dadurch zu erklären ist dass die Fasern in beiden Fällen im Bezug auf die Ränder unterschiedlich ausgerichtet sind. Die Ergebnisse mit piezoelektrischem Materialverhalten sind auch für den Winkelverbund qualitativ sehr ähnlich zu den Singularitätsordnungen im rein linear-elastischen Fall. Auch hier verschwinden die Werte in den Grenzfällen 0° und 90° und nehmen das Maximum im Bereich von $\vartheta = 45^\circ$ an. Die Werte sind jedoch jeweils wieder etwas stärker als im rein linear-elastischen Fall. So liegt der Maximalwert hier bei circa $-0,12$ im Vergleich zu $-0,08$ für das orthotrope Material.

Aus diesen Untersuchungen lassen sich erste Schlüsse über Singularitätsordnungen in piezoelektrischen Konfigurationen ziehen. Die Ergebnisse werden durch das piezoelektrische Materialverhaltens offenbar qualitativ nicht wesentlich verändert, der Betrag der Singularitätsordnungen wird jedoch jeweils etwas verstärkt. Diese Aussagen beziehen sich auf die gewählten Materialdaten, für eine willkürliche Wahl von linear-elastischen und piezoelektrischen Materialdaten muss diese Aussage selbstverständlich erst überprüft werden.

5.3 Dreidimensionale Interaktion von vier Kerben

Als nächstes wurde die bereits in Abschnitt 3.2.2 für rein linear-elastische Materialien untersuchte dreidimensionale Interaktion von vier im rechten Winkel aufeinandertreffenden Kerben mit piezoelektrischem Materialverhalten untersucht. Hierbei wurden wie im vorherigen Abschnitt ein fiktiver Werkstoff gewählt, der in diesem Fall mechanisch isotrope Eigenschaften und die piezoelektrischen Materialdaten von PZT-5A wie in Abschnitt 5.2 aufgeführt besitzt. Die Wahl der mechanischen Materialdaten erfolgt wieder, um eine bessere Vergleichbarkeit mit den ermittelten Ergebnissen im linear-elastischen Fall zu erhalten. Die Geometrie bleibt wie in Abbildung 5 dargestellt mit homogenem Materialverhalten für die gesamte Konfiguration. Das Ähnlichkeitszentrum liegt an gleicher Stelle, das Netz kann ebenso unverändert verwendet werden. Der Elastizitätsmodul beträgt $E = 210.000$ MPa. Es wird wiederum für verschiedene Kerböffnungswinkel, nämlich $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$, die Querkontraktionszahl ν im Bereich 0 bis 0,49 variiert. Die Daten werden hierbei für Schrittgrößen von $\Delta\nu = 0,02$ berechnet. Die ermittelten Realteile der Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interaktionspunkt in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl ν sind für die Kerböffnungswinkel 0° und 30° in Abbildung 45 und für die Kerböffnungswinkel 60° und 90° in Abbildung 46 dargestellt.

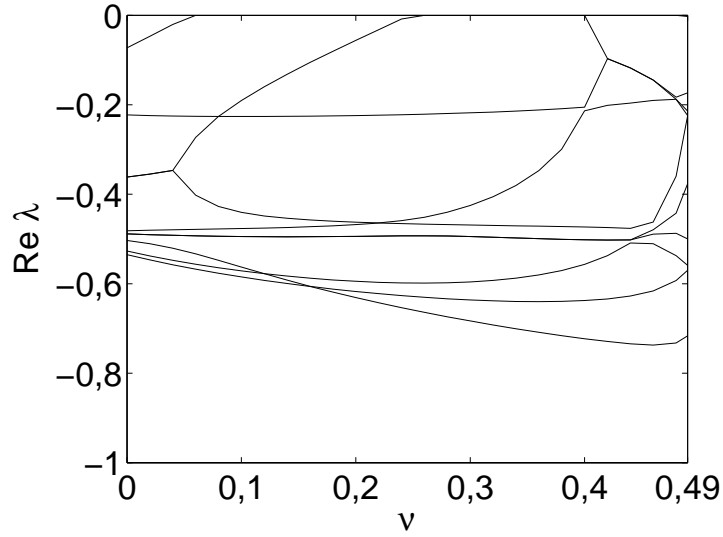
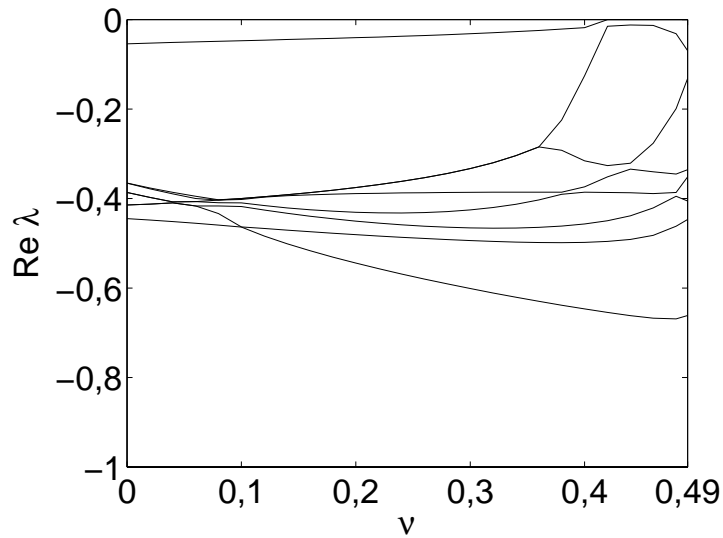
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=0^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=30^\circ$

Abbildung 45: Singularitätsordnungen für vier gerade, rechtwinklig aufeinander stehende Kerben für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in einem piezoelektrischen Festkörperkontinuum mit mechanisch isotropen Eigenschaften mit $E = 210.000 \text{ MPa}$ und den piezoelektrischen Materialdaten von PZT-5A in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν .

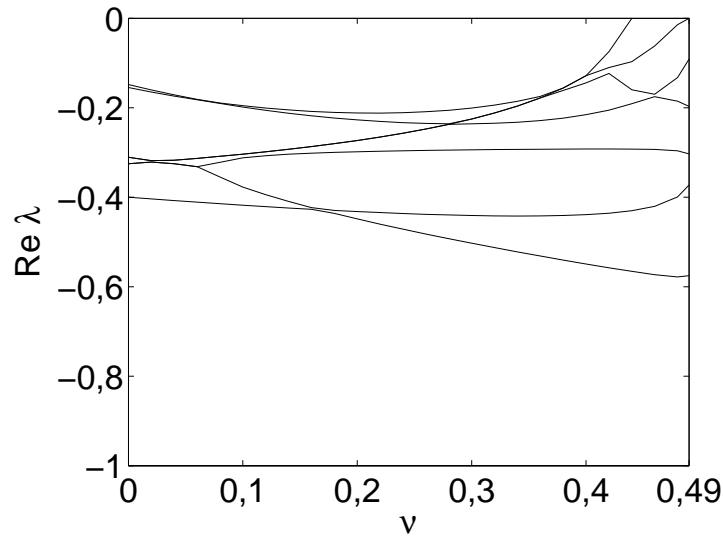
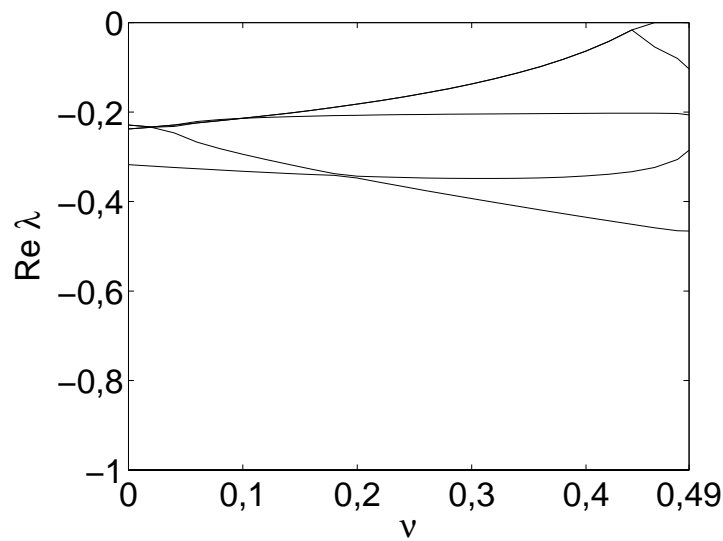
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=60^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=90^\circ$

Abbildung 46: Singularitätsordnungen für vier gerade, rechtwinklig aufeinander stehende Kerben für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in einem piezoelektrischen Festkörperkontinuum mit mechanisch isotropen Eigenschaften mit $E = 210.000 \text{ MPa}$ und den piezoelektrischen Materialdaten von PZT-5A in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν .

Bei der Betrachtung der Ergebnisse für piezoelektrisches Materialverhalten fällt auf, dass eine große Anzahl verschiedener Singularitäten vorliegt. Die stärkste auftretende Singularitätsordnung nimmt hierbei wieder mit sich öffnendem Kerböffnungswinkel ab. Der Verlauf der stärksten Singularitätsordnung über den Wertebereich der Querkontraktionszahl ist für alle Kerböffnungswinkel qualitativ ähnlich: die stärkste im relevanten Bereich auftretende Singularitätsordnung ist stets in den Bereichen höherer Querkontraktionszahlen maximal. Hierbei tritt bei den Winkeln 0° , 30° und 60° für niedrige Querkontraktionszahlen eine Singularitätsordnung auf, die sich vom Betrag der Singularitätsordnung für hohe Querkontraktionszahlen um beinahe 0,2 unterscheidet. Die Wahl der Querkontraktionszahl hat also einen relativ großen Einfluss auf die stärkste Singularitätsordnung für diese Konfiguration. Weiterhin fällt bei den Ergebnissen auf, dass die Verläufe der Singularitätsordnungen zum Teil komplexwertig sind und allgemein ein komplexes Geschehen abbilden.

Im Vergleich mit den Abbildungen 7 und 8 der in Abschnitt 3.2.2 dargestellten Ergebnisse für den rein elastischen Fall ergeben sich für jede Geometrie zusätzliche Eigenwerte im relevanten Bereich, was für zusätzliche Freiheitsgrade auch zu erwarten ist. Auch sind die maximalen Singularitätsordnungen für piezoelektrisches Materialverhalten für alle Kerböffnungswinkel stärker als die jeweiligen Maximalwerte im rein linear-elastischen Fall. Hier werden nun durch das piezoelektrische Materialverhalten also wie im vorherigen Abschnitt die Beträge der maximalen Singularitätsordnungen verstärkt, weiterhin ist hier jedoch der Verlauf der Singularitätsordnungen im relevanten Bereich komplexer als im linear-elastischen Fall. Dies kann jedoch auch zum Teil daran liegen dass eben nur der Wertebereich der Realteile betrachtet ist, der für die Beurteilung der Singularitätsordnungen von Interesse ist.

5.4 Interfacekerb am freien Rand

Als nächstes wurde der Interfacekerb am freien Rand, der in Abschnitt 3.3.1 für rein linear-elastisches Materialverhalten modelliert wurde, untersucht. Hierfür wurden nun die mechanischen Eigenschaften von T300/Epoxy sowie die elektrischen und piezoelektrischen Werte von PZT-5A verwendet.

Wie im rein elastostatischen Fall wurden zunächst für den Interfaceriss am freien Rand, also einen Kerböffnungswinkel von 0° , für einen Lagenaufbau von $[0^\circ/\vartheta]$ und $[\pm\vartheta]$ die zweidimensionalen Diskontinuitäten untersucht und die Ergebnisse mit denen am dreidimensionalen Interaktionspunkt verglichen. Die Ergebnisse jeweils zuerst für die beiden zweidimensionalen Diskontinuitätslinien und dann den dreidimensionalen Interaktions-

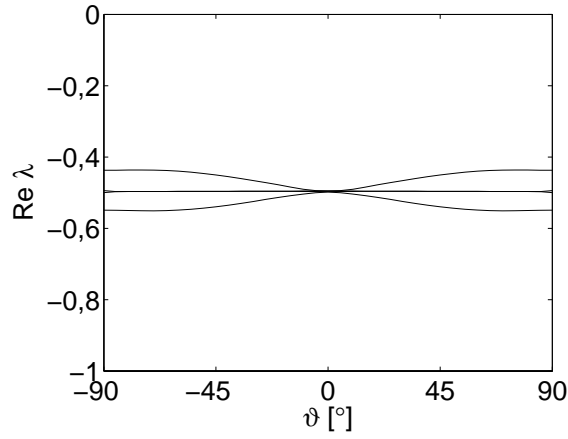
punkt sind für den Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ in Abbildung 47 und für $[\pm\vartheta]$ in Abbildung 48 dargestellt. Für $[0^\circ/\vartheta]$ treten teilweise Imaginärteile auf, auf deren Darstellung hier jedoch der Übersicht halber verzichtet wird.

Für piezoelektrisches Materialverhalten ergeben sich für den Interaktionspunkt qualitativ ähnliche Verläufe wie im elastostatischen Fall. Es treten jedoch wie zu erwarten zusätzliche Eigenwerte auf. Außerdem werden die Singularitätsordnungen von ihrer Größe her leicht geändert, es kommt also zu einer ganz klaren Interaktion durch die piezoelektrischen Materialeigenschaften. Zum einen ist die maximale Singularitätsordnung etwas größer als im orthotropen Fall, zum anderen wächst die Ordnung für jeden einzelnen Winkelwert an. Somit sind die auftretenden Spannungssingularitäten in der gleichen Situation für die gewählten Materialeigenschaften für piezoelektrisches Material von der Singularitätsordnung her stets kritischer als im elastostatischen Fall.

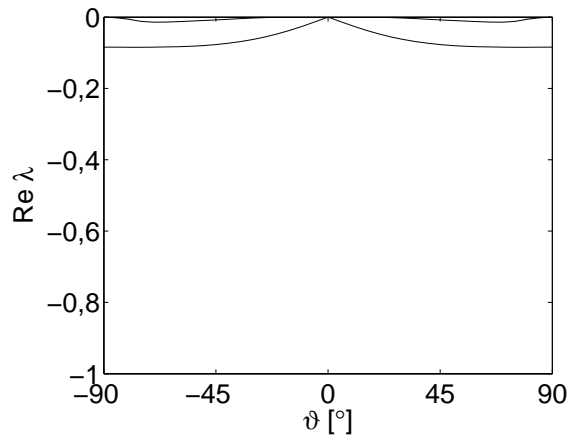
Qualitativ betrachtet sind die größten Unterschiede für orthotropes und piezoelektrisches Materialverhalten im Rissgrund zu beobachten. Aus dem ungefähr konstanten Wert im orthotropen Fall ergeben sich nun die in den jeweils oberen Teilen der Abbildungen 47 und 48 dargestellten Verläufe. Interessanterweise lässt sich hier insbesondere beim Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ eine gewisse Ähnlichkeit des Verlaufs im Dreidimensionalen mit den Singularitätsordnungen der zweidimensionalen Diskontinuitäten erkennen. Ein genaues Bildungsgesetz lässt sich auch hier nicht angeben, in grober Näherung scheinen sich die Singularitätsordnungen im Interaktionspunkt jedoch aus den Singularitätsordnungen der beiden zweidimensionalen Diskontinuitäten zusammenzusetzen.

Weiter wurden wieder ähnliche Untersuchungen für einen Interfacekerb am freien Rand mit verschiedenen Kerböffnungswinkeln durchgeführt. Die Ergebnisse für piezoelektrisches Materialverhalten für jeweils einen Lagenaufbau von $[0^\circ/\vartheta]$ und $[\pm\vartheta]$ sind in den Abbildungen 49-51 dargestellt. Da aus den Realteilen zu erkennen ist, ob Imaginärteile auftreten oder nicht, wird hier auf die Abbildung der Imaginärteile verzichtet.

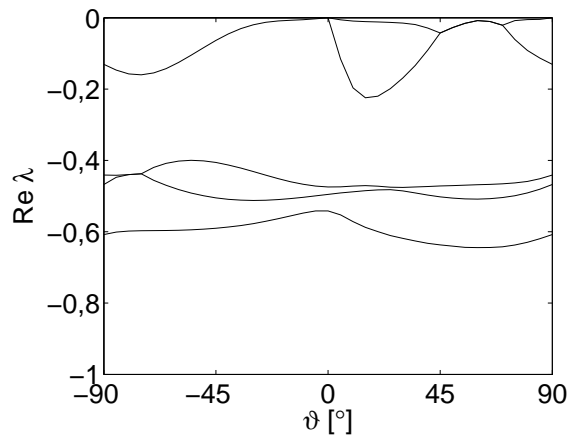
Auch hier lässt sich erkennen, dass sich der Verlauf der Singularitätsordnungen mit zunehmendem Kerböffnungswinkel leicht entzerrt und die Singularitätsordnungen schwächer werden, außerdem nach und nach weniger Eigenwerte in den relevanten Bereich fallen. Der Vergleich der auftretenden Singularitätsordnungen im elastostatischen und piezoelektrischen Fall liefert für alle Kerböffnungswinkel ähnliche Aussagen wie für den Riss: Im piezoelektrischen Fall sind die Maximalwerte etwas größer und es treten über den gesamten Winkelbereich etwas stärkere Singularitätsordnungen auf. Am ausgeprägtesten ist dieser Effekt jedoch für den Riss. Für piezoelektrisches Materialverhalten tritt wieder, wie zu erwarten, ein zusätzlicher Eigenwert auf. Der qualitative Verlauf ist bei allen Kerböffnungswinkeln für beide Materialverhalten sehr ähnlich.



Singulartätsordnungen für den Rissgrund im Interface

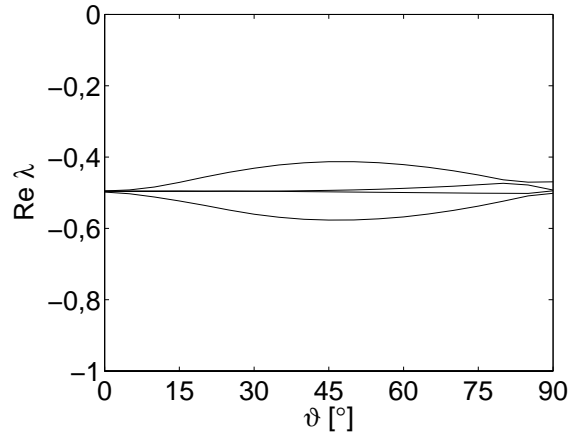


Singulartätsordnungen für das Interface am freien Rand

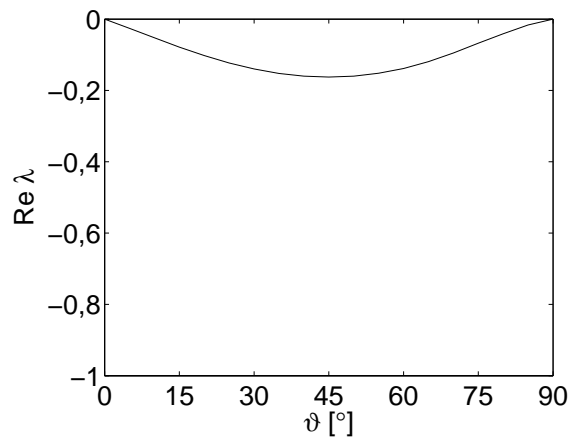


Singulartätsordnungen für den Interaktionspunkt des Interfacerrisses am freien Rand

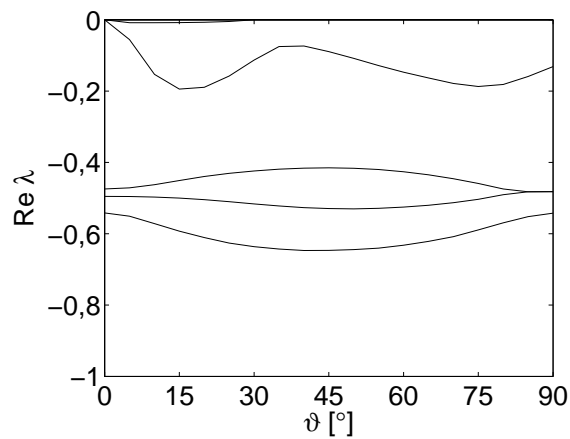
Abbildung 47: Singulartätsordnungen für einen Interfacerriss am freien Rand für piezoelektrisches Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .



Singulartätsordnungen für den Rissgrund im Interface



Singulartätsordnungen für das Interface am freien Rand



Singulartätsordnungen für den Interaktionspunkt des Interfacerrisses am freien Rand

Abbildung 48: Singulartätsordnungen für einen Interfacerriss am freien Rand für piezoelektrisches Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

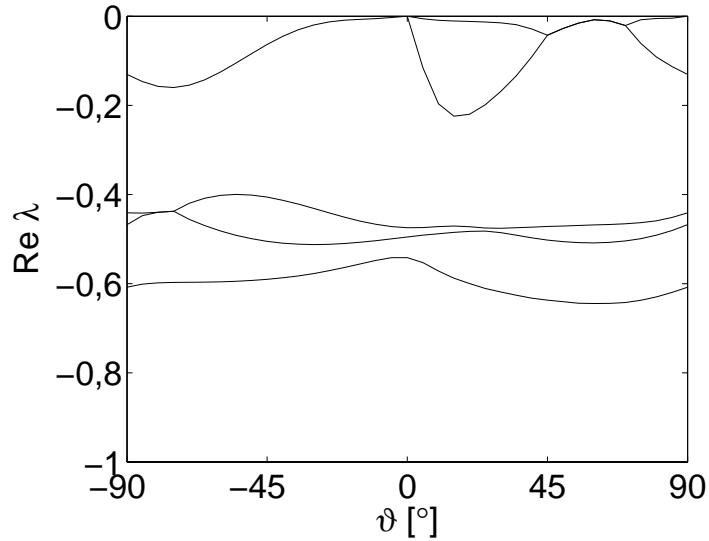
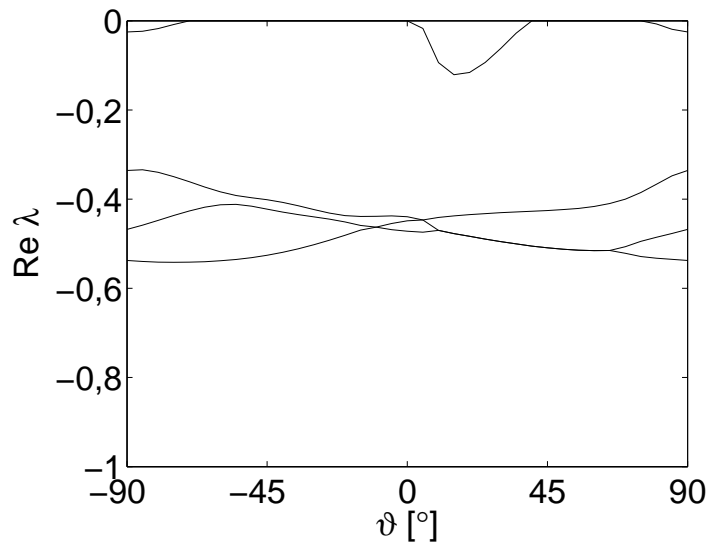
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=0^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=30^\circ$

Abbildung 49: Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für piezoelektrisches Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

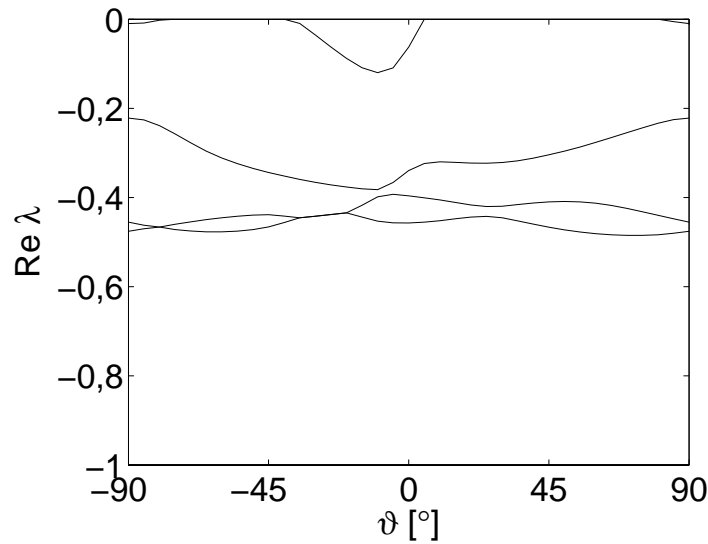
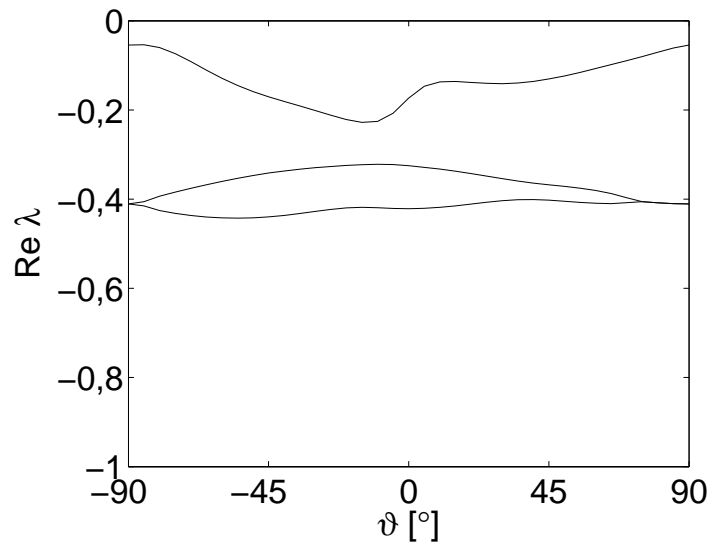
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=60^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=90^\circ$

Abbildung 50: Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für piezoelektrisches Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[0^\circ/\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

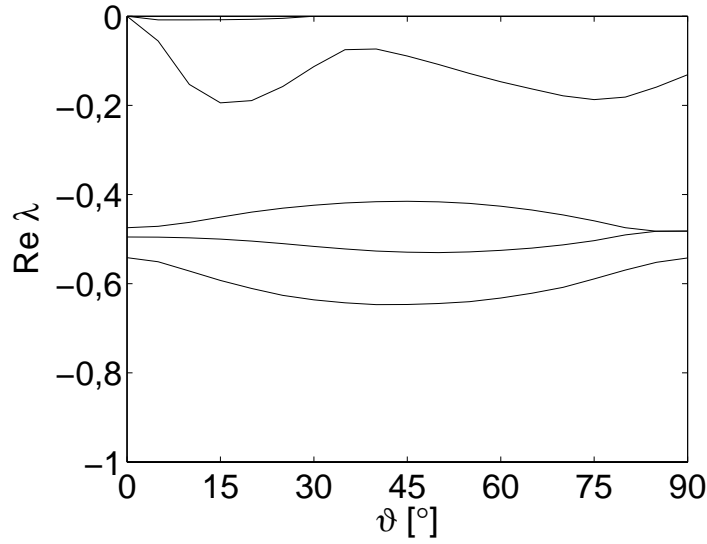
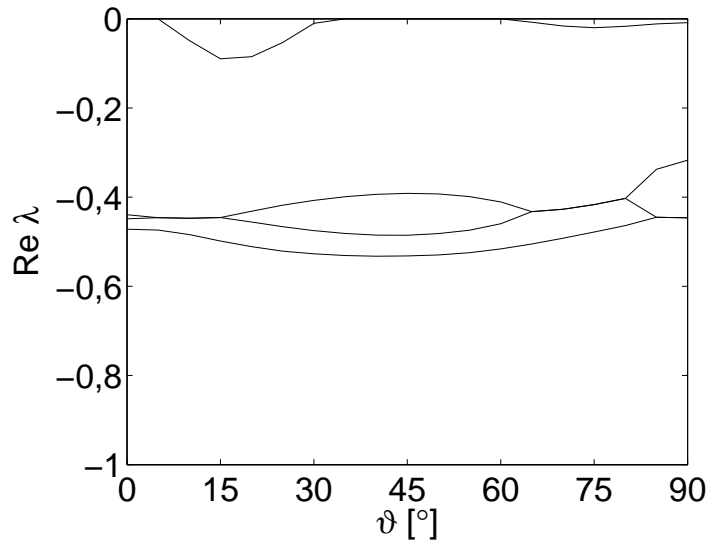
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=0^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=30^\circ$

Abbildung 51: Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für piezoelektrisches Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

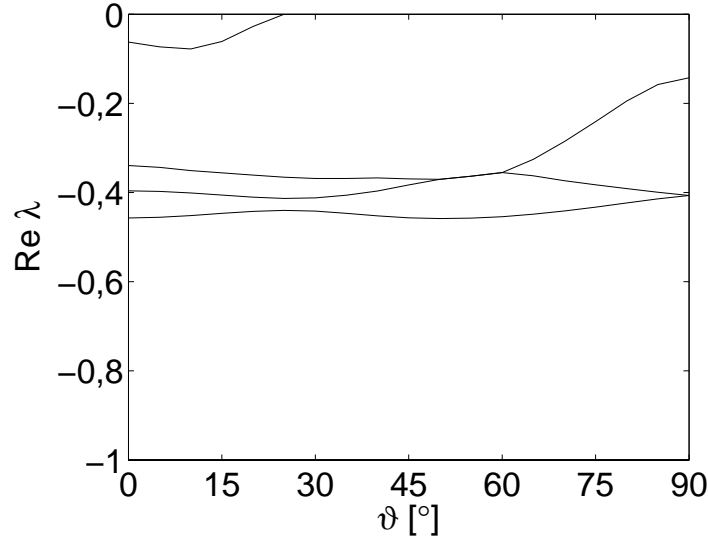
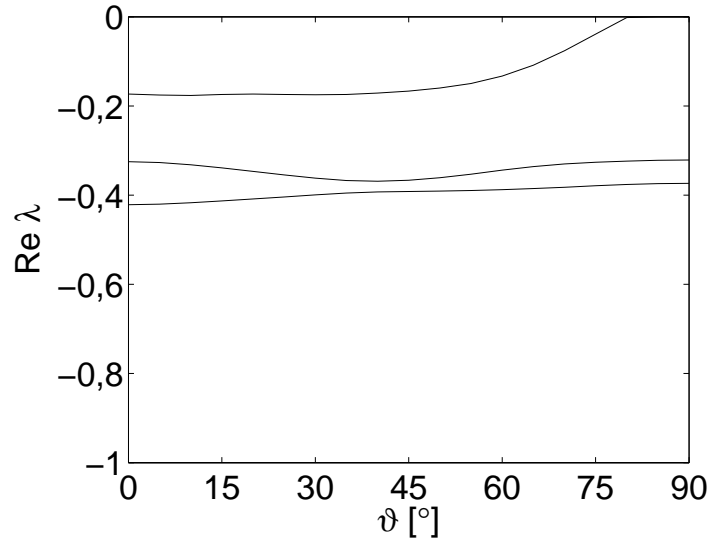
Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=60^\circ$ Singularitätsordnungen für den Kerböffnungswinkel $\gamma=90^\circ$

Abbildung 52: Singularitätsordnungen für den dreidimensionalen Interfacekerb am freien Rand für piezoelektrisches Materialverhalten mit einem Lagenaufbau $[\pm\vartheta]$ und den Materialdaten von T300/Epoxy und PZT-5A für verschiedene Kerböffnungswinkel γ in Abhängigkeit des Lagenwinkels ϑ .

5.5 Fazit

Mithilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode können Konfigurationen mit piezoelektrischem Materialverhalten untersucht werden. Sofern eine Implementierung der Methode in der Erweiterung für piezoelektrisches Materialverhalten vorliegt, erfolgt dies ohne großen Mehraufwand zur Analyse für rein linear-elastisches Materialverhalten, da die Materialwerte einfach in der Eingabedatei angepasst werden können. Somit können vorhandene Modelle und Netze, die für die Analyse von linear-elastischen Konfigurationen erstellt wurden, direkt verwendet werden. Die Anforderungen an Netze und die Vorteile durch die Reduktion der Dimension innerhalb der Methode entsprechen daher denen im linear-elastischen Fall.

Durch das piezoelektrische Materialverhalten treten bei den untersuchten Konfigurationen im Vergleich mit den Ergebnissen für dieselben Konfigurationen mit linear-elastischem Materialverhalten jeweils zusätzliche Singularitätsordnungen auf, was durch den zusätzlichen elektrischen Freiheitsgrad zu erwarten ist. Die Singularitätsordnungen nehmen außerdem im direkten Vergleich immer stärkere Werte an. Durch die Verwendung von piezoelektrischem Material entstehen also offenbar bei gleichen mechanischen Eigenschaften kritischere Spannungen als bei der gleichen Konfiguration mit linear-elastischem Material. Wenngleich die Wahl des hier verwendeten fiktiven Materials nicht unbedingt repräsentativ für alle real existierenden piezoelektrischen Materialien sein muss, deuten die Ergebnisse doch darauf hin, dass Strukturen mit piezoelektrischen Materialien in der Praxis in jedem Fall sorgsam geprüft werden sollten.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde untersucht, wie Spannungssingularitätsordnungen in zwei- und dreidimensionalen Multimaterialkonfigurationen mit geometrischen und materiellen Diskontinuitäten mithilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode ermittelt werden können. Hierbei wurden sowohl Konfigurationen mit rein linear-elastischen als auch mit piezoelektrischem Materialverhalten betrachtet.

Nach einer Darstellung der theoretischen Grundlagen, im Rahmen derer Spannungssingularitäten auftreten, wurde die verwendete Implementierung der Rand-Finite-Elemente-Methode kurz beschrieben und Anforderungen an Netze bei der Modellbildung diskutiert. Bei der Analyse von linear-elastischen Konfigurationen wurde gezeigt, wie die Methode zur Ermittlung von Spannungssingularitätsordnungen eingesetzt werden kann. Bei der Auswahl und Auswertung der untersuchten Konfigurationen lag das Augenmerk zum einen darauf, neue Ergebnisse für bislang unbekannte Konfigurationen zur Verfügung zu stellen. Zum anderen wurden mögliche Zusammenhänge von Singularitätsordnungen an dreidimensionalen Interaktionspunkten von zwei zweidimensionalen Diskontinuitäten mit den Singularitätsordnungen der einzelnen Diskontinuitäten untersucht. Hierbei wurde bei den untersuchten Konfigurationen festgestellt, dass das Geschehen an den dreidimensionalen Interaktionspunkten recht komplex ist. Einfache Bildungsregeln konnten nicht aufgedeckt werden, so dass eine echte dreidimensionale Analyse für die meisten Konfigurationen nötig ist. Die Rand-Finite-Elemente-Methode erwies sich hierbei als effizientes Werkzeug.

Weiter wurde für eine Reihe ausgewählter Konfigurationen der Einfluss einzelner geometrischer Parameter oder Materialwerte auf die Singularitätsordnung betrachtet. Insbesondere wurde anhand einiger Beispiele gezeigt wie mithilfe von Optimierungstechniken gezielt die maximale Singularitätsordnung für die Variation von Parametern in gewählten Wertebereichen ermittelt werden kann. Da oft die kritischste Singularitätsordnung, die für eine Konfiguration auftreten kann, von Interesse ist, ist eine zielgerichtete Analyse von Vorteil. Die untersuchten Beispiele zeigten hier zum einen, dass auch in sehr einfach erscheinenden Konfigurationen sehr starke Singularitätsordnungen auftreten können. Dabei führen neben Rissen scheinbar vor allem sehr unterschiedliche Materialeigenschaften zu starken Singularitätsordnungen. Zum anderen wurde deutlich, dass Singularitätsordnungen bei Multimaterialkonfigurationen mit zusätzlichen geometrischen Diskontinuitäten nicht immer anschaulich vorhergesagt werden können, sondern

dass teilweise überraschende Ergebnisse auftreten können. Daher ist eine ausführliche Analyse mit einer zuverlässigen Methode zur bruchmechanischen Bewertung einer solchen Konfiguration immer notwendig.

Bei der Untersuchung von piezoelektrischen Konfigurationen konnte gezeigt werden, dass sich die Rand-Finite-Elemente-Methode auch für dieses Materialverhalten gut zur Ermittlung von Spannungssingularitätsordnungen eignet. Hierin liegt ein klarer Vorteil der Methode, da viele andere Verfahren nur für eine eingeschränkte Auswahl an Materialverhalten einsetzbar sind. Ein Vergleich mit rein linear-elastischen Konfigurationen ergab, dass für piezoelektrisches Materialverhalten jeweils zusätzliche und allgemein stärkere Singularitätsordnungen auftraten. Bei der Verwendung von piezoelektrischen Materialien in Strukturen muss also auch bei gleichbleibenden mechanischen Eigenschaften davon ausgegangen werden, dass stärkere Singularitätsordnungen auftreten als für die gleiche Konfiguration mit rein linear-elastischem Materialverhalten.

Ausblick

Aus den betrachteten Konfigurationen und den durchgeführten Analysen ergeben sich eine Reihe von möglichen Ansatzpunkten für weitere Untersuchungen. Für die Rand-Finite-Elemente-Methode beziehungsweise die verwendete Implementierung ist eine Optimierung der Lösungsalgorithmen bezüglich der benötigten Rechenzeit bisher nicht erfolgt. Eine Minimierung der Rechenzeit würde die Analyse einiger dreidimensionaler Konfigurationen und umfangreiche Parametervariationen teilweise erleichtern. Im Hinblick auf die Netzgenerierung ist die Methode allgemein sehr anwenderfreundlich. Zur Variation einzelner geometrischer Parameter ist jedoch eine geschickte Parametrisierung nötig, bei der das Netz einerseits an entsprechenden Stellen fein genug ist, um kleine Schritte bei der Parameterveränderung zu erlauben und andererseits geeignete Übergänge zu gröberen Elementen beinhaltet, um nicht das ganze Netz sehr fein gestalten zu müssen. Hier kann die geschickte automatisierte Netzgenerierung für möglichst viele verschiedene Konfigurationen sicherlich noch weiter vorangetrieben werden.

In Bezug auf Konfigurationen mit rein linear-elastischem Materialverhalten ist insbesondere im Dreidimensionalen die Zahl der möglichen Konfigurationen mit mehreren Materialien unbeschränkt. Daher ist zum einen schlicht die Ermittlung der Singularitätsordnungen für weitere unbekannte Konfigurationen von Interesse. Zum anderen konnten zwar bei den betrachteten Situationen keine einfachen Bildungsregeln gefunden werden, jedoch könnte noch für weitere Konfigurationen untersucht werden, ob nicht in anderen Fällen ein Zusammenhang aufgedeckt werden kann. Ebenso wäre die

weitere Suche nach dreidimensionalen Konfigurationen mit besonders starken Singularitätsordnungen von Interesse.

Bei der gezielten Ermittlung maximaler Singularitätsordnungen ist vor allem die gleichzeitige Variation mehrerer Parameter interessant, die sich durch eine Minimierung der Rechenzeit noch weiter verfolgen ließe. Auch die verbesserte Netzgenerierung zur Variation geometrischer Parameter würde die Möglichkeiten der Optimierung erweitern.

Für piezoelektrische Konfigurationen, die hier nur mit ausgewählten Materialdaten untersucht wurden, ist eine Analyse für unterschiedliche Materialdaten im nächsten Schritt interessant, um zu sehen, ob sich die bisherigen Erkenntnisse auf Konfigurationen mit beliebigen piezoelektrischen Materialdaten übertragen lassen. Ebenso wäre es denkbar, genauer den Einfluss der einzelnen Materialparameter auf die Singularitätsordnung zu untersuchen. Für piezoelektrische Konfigurationen ist eine weiterführende Thematik außerdem die Betrachtung von mechanischem und elektrischem Versagen beziehungsweise die Fragestellung, welches Versagen für einzelne Konfigurationen zuerst auftritt.

Literatur

- [1] ARTEL, J.: *Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung in ebenen Laminaten*, TU Darmstadt, Dissertation, 2007
- [2] ARTEL, J. ; BECKER, W.: Analysis of the Free-Edge Effect in Piezoelectric Laminated Plates by the Scaled Boundary Finite-Element Method. In: TOPPING, B.H.V. (Hrsg.) ; MONTERO, G. (Hrsg.) ; MONTENEGRO, R. (Hrsg.): *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology* Bd. 147. Stirlingshire, UK : Civil-Comp Press, 2006, S. 329–355. – doi:10.4203/ccp.83.275
- [3] BAŽANT, Z. P.: Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: A general numerical method. In: *International Journal of Engineering Science* 12 (1974), Nr. 3, S. 221–243
- [4] BAŽANT, Z. P. ; ESTENSSORO, Luis F.: Surface singularity and crack propagation. In: *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), Nr. 5, S. 405–426
- [5] BARROSO, A. ; MANTIČ, V. ; PARÍS, F.: Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners. In: *International Journal of Fracture* 119 (2003), S. 1–23
- [6] BARSOUM, R. S.: Asymptotic fields at interfaces using the finite element iterative method. In: *Computers Structures* 35 (1990), Nr. 4, S. 285–292
- [7] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer, Berlin, 2002
- [8] BENJEDDOU, A.: Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. In: *Computers & Structures* 76 (2000), S. 347–363
- [9] BENTHEM, J. P.: State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space. In: *International Journal of Solids and Structures* 13 (1977), Nr. 5, S. 479–492
- [10] BERLINCOURT, D. A. ; CURRAN, D. R. ; JAFFE, H.: Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. In: MASON, Warren P. (Hrsg.): *Physical acoustics* Bd. 1A. Academic Press, New York, 1964, S. 169–270
- [11] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. 2. Auflage. Springer, Berlin, 2001

- [12] BIRK, C. ; BEHNKE, R.: A modified scaled boundary finite element method for three-dimensional dynamic soil-structure interaction in layered soil. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89 (2012), Nr. 3, S. 371–402
- [13] BOGY, D. B.: Edge-Bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), Nr. 3, S. 460–466
- [14] BOGY, D. B.: On the problem of edge-bonded elastic quarter-planes loaded at the boundary. In: *International Journal of Solids and Structures* 6 (1970), Nr. 9, S. 1287–1313
- [15] BOGY, D. B.: Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surface Traction. In: *Journal of Applied Mechanics* 38 (1971), Nr. 2, S. 377–386
- [16] BOGY, D. B. ; WANG, K. C.: Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 7 (1971), Nr. 8, S. 993–1005
- [17] CADY, W. G.: *Piezoelectricity*. McGraw-Hill, New York, 1946
- [18] CARPINTERI, A. ; PAGGI, M.: Influence of the intermediate material on the singular stress field in tri-material junctions. In: *Materials Science* 42 (2006), Nr. 1, S. 95–101. – auch in Proceedings ICF 2005 Turin
- [19] CARPINTERI, A. ; PAGGI, M.: Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 1–2, S. 59–74
- [20] CARPINTERI, A. ; PAGGI, M.: Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. In: *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009), Nr. 12, S. 1771–1784
- [21] CHEN, D.-H. ; NISITANI, H.: Singular Stress Field Near the Corner of Jointed Dissimilar Materials. In: *Journal of Applied Mechanics* 60 (1993), Nr. 3, S. 607–613
- [22] CHEN, H.-P.: Stress singularities in anisotropic multi-material wedges and junctions. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 11, S. 1057–1073

- [23] DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA: *Abaqus User's Manual*. Version 6.10, Providence, RI, USA, 2010
- [24] DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA: *Isight 4.5 Getting Started Guide*. Providence, RI, USA, 2010
- [25] DAVI, G. ; MILAZZO, A.: Stress and Electric Fields in Piezoelectric Composite Laminates. In: *Electronic Journal of Boundary Elements* BETEQ 2001 (2002), Nr. 1, S. 43–50
- [26] DEEKS, A. J.: Prescribed side-face displacements in the scaled boundary finite-element method. In: *Computers & Structures* 82 (2004), S. 1153–1165
- [27] DEEKS, A. J. ; CHENG, L.: Potential flow around obstacles using the scaled boundary finite-element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41 (2003), S. 721–741
- [28] DEEKS, A. J. ; WOLF, J. P.: A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics. In: *Computational Mechanics* 28 (2002), S. 489–504
- [29] DELALE, F.: Stress singularities in bonded anisotropic materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 20 (1984), Nr. 1, S. 31–40
- [30] DEMPSEY, J. P.: Power-logarithmic stress singularities at bi-material corners and interface cracks. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 9 (1995), Nr. 2, S. 253–265
- [31] DEMPSEY, J. P. ; SINCLAIR, G. B.: On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. In: *Journal of Elasticity* 9 (1979), Nr. 4, S. 373–391
- [32] DEMPSEY, J. P. ; SINCLAIR, G. B.: On the singular behaviour at the vertex of a bi-material wedge. In: *Journal of Elasticity* 11 (1981), Nr. 3, S. 317–327
- [33] DESMORAT, R. ; LECKIE, F. A.: Singularities in bi-materials: parametric study of an isotropic/anisotropic joint. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 17 (1998), Nr. 1, S. 33–52
- [34] DIERINGER, R. ; HEBEL, J. ; BECKER, W.: The scaled boundary finite element method for plate bending problems. In: *Proceedings of the 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics*. Warsaw, Poland, 2011, S. 169–170

- [35] DIMITROV, A. ; ANDRÄ, H. ; SCHNACK, E.: Singularities near three-dimensional corners in composite laminates. In: *International Journal of Fracture* 115 (2002), S. 361–375
- [36] DOHERTY, J. P. ; DEEKS, A. J.: Scaled boundary finite-element analysis of a non-homogeneous axisymmetric domain subjected to general loading. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 27 (2003), S. 813–835
- [37] DOHERTY, J. P. ; DEEKS, A. J.: Scaled boundary finite-element analysis of a non-homogeneous elastic half-space. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57 (2003), S. 955–973
- [38] ENGLAND, A. H.: On stress singularities in linear elasticity. In: *International Journal of Engineering Science* 9 (1971), Nr. 6, S. 571–585
- [39] ESCHENAUER, H. ; SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie*. 3. Auflage. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993
- [40] GERTHSEN, C.: *Gerthsen Physik*. 23. Auflage. Springer, Berlin, 2006
- [41] GHahremani, F.: A numerical variational method for extracting 3D singularities. In: *International Journal of Solids and Structures* 27 (1991), Nr. 11, S. 1371–1386
- [42] GHahremani, F. ; SHIH, C. F.: Corner Singularities of Three-Dimensional Planar Interface Cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), Nr. 1, S. 61–68
- [43] GLUSHKOV, E. ; GLUSHKOVA, N. ; LAPINA, O.: 3-D elastic stress singularity at polyhedral corner points. In: *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), Nr. 8, S. 1105–1128
- [44] GOPINATHAN, S. V. ; VARADAN, V. V. ; VARADAN, V. K.: A review and critique of theories for piezoelectric laminates. In: *Smart Mater. Struct.* 9 (2000), S. 24–48
- [45] GREEN, A. E. ; ZERNA, W.: *Theoretical Elasticity*. 2. Auflage. Clarendon Press, Oxford, 1968
- [46] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik*. 3. Auflage. Springer, Berlin, 2001
- [47] GU, L. ; BELYTSCHKO, T.: A numerical study of stress singularities in a two-material wedge. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 6, S. 865–889

- [48] HEIN, V. L. ; ERDOGAN, F.: Stress singularities in a two-material wedge. In: *International Journal of Fracture* 7 (1971), Nr. 3, S. 317–330
- [49] HERING, E. ; MARTIN, R. ; STOHRER, M.: *Physik für Ingenieure*. 10. Auflage. Springer, Berlin, 2007
- [50] IKEDA, T.: *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1996
- [51] JANOCHA, H.: *Adaptronics and Smart Structures*. Springer, Berlin, 1999
- [52] KASSIR, M. K. ; SIH, G. C.: Three-Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings. In: *Journal of Applied Mechanics* 33 (1966), Nr. 3, S. 601–611
- [53] KOGUCHI, H. ; MURAMOTO, T. ; IHARA, I.: Analysis for stress singularity field at a vertex in three-dimensional bonded structures. In: *JSME International Journal* 42 (1999), Nr. 1, S. 80–89
- [54] KUNA, M.: Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures: a survey. In: *Archive of Applied Mechanics* 76 (2006), S. 725–745
- [55] KUO, C. M. ; BARNETT, D. M.: Stress singularities of interfacial cracks in bonded piezoelectric half-spaces. In: *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1991, S. 33–50
- [56] LEGUILLON, D.: Computation of 3D Singular Elastic Fields for the Prediction of Failure at Corners. In: *Key Engineering Materials* 251–252 (2003), S. 147–152
- [57] LEGUILLON, D. ; SANCHEZ-PALENCIA, E.: On 3D cracks intersecting a free surface in laminated composites. In: *International Journal of Fracture* 99 (1999), S. 25–40
- [58] LIN, Y. Y. ; SUNG, J. C.: Stress Singularities at the Apex of a Dissimilar Anisotropic Wedge. In: *Journal of Applied Mechanics* 65 (1998), Nr. 2, S. 454–463
- [59] LIN, Z. ; LIAO, S.: The scaled boundary FEM for nonlinear problems. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16 (2011), Nr. 1, S. 63–75
- [60] LINDEMANN, J. ; BECKER, W.: Analysis of the free-edge effect in composite laminates by the boundary finite-element method. In: *Mechanics of Composite Materials* 36 (2000), Nr. 3, S. 207–214

- [61] LINDEMANN, J. ; BECKER, W.: Free-edge stresses around holes in laminates by the boundary finite-element method. In: *Mechanics of Composite Materials* 38 (2002), Nr. 5, S. 407–416
- [62] LINKOV, A. ; RYBARSKA-RUSINEK, L.: Numerical method and models for anti-plane strain of a system with a thin elastic wedge. In: *Archive of Applied Mechanics* 78 (2007), Nr. 10, S. 821–831
- [63] LONGERU, M. ; MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: The Boundary Finite Element Method for the Efficient Computation of Orders and Modes of Three-Dimensional Stress Singularities. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 5. Weinheim : Wiley-VCH Verlag, 2005, S. 345–346
- [64] MATHWORKS: *MATLAB Software User's Guide*. Version 7.12 (R2011a), Natick, Massachusetts, USA, 2011
- [65] MAYLAND, W. ; BECKER, W.: Scaled boundary finite element analysis of stress singularities in piezoelectric multi-material systems. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 9. Weinheim : Wiley-VCH Verlag, 2009, S. 99–102
- [66] MAYLAND, W. ; BECKER, W.: Semi-analytical Investigation of Stress Singularities due to Geometrical and Material Discontinuities in Piezoelectric Laminates. In: HADDAD, Y.M. (Hrsg.): *Advances and Trends in Engineering Materials and their Applications. Proceedings of AES - ATEMA Fourth International Conference: Hamburg, Germany*. Ottawa, Canada : Advanced Engineering Solutions, September 2009, S. 29–34. – ISBN 0-9780479
- [67] MAYLAND, W. ; BECKER, W.: Stress Singularities in Piezoelectric Multi-Material Systems. In: BANKS, William M. (Hrsg.) ; WISNOM, Michael R. (Hrsg.): *Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials (ICCM-17)*. Edinburgh, UK : The British Composites Society, 2009. – CD-ROM Publikation
- [68] MISHURIS, G. ; KUHN, G.: Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models. In: *Archive of Applied Mechanics* 71 (2001), Nr. 11, S. 764–780
- [69] MITTELSTEDT, C.: *Free-edge effects in composite laminates*, Universität Siegen, Dissertation, 2006

- [70] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Semi-analytical computation of 3D stress singularities in linear elasticity. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 21 (2005), Nr. 5, S. 247–257
- [71] MUNZ, D. ; YANG, Y. Y.: Stress Singularities at the Interface in Bonded Dissimilar Materials Under Mechanical and Thermal Loading. In: *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), Nr. 4, S. 857–861
- [72] OOI, E. T. ; YANG, Z. J.: Modelling dynamic crack propagation using the scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 88 (2011), Nr. 4, S. 329–349
- [73] PAGEAU, S. S. ; BIGGERS JR, S. B.: Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), Nr. 13, S. 2225–2239
- [74] PAGEAU, S. S. ; BIGGERS JR, S. B.: A finite element approach to three-dimensional singular stress states in anisotropic multi-material wedges and junctions. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), Nr. 1, S. 33–47
- [75] PAGEAU, S. S. ; JOSEPH, P. F. ; BIGGERS JR, S. B.: The order of stress singularities for bonded and debonded three-material junctions. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 21, S. 2979–2997
- [76] PICU, C. R. ; GUPTA, V.: Stress singularities at triple junctions with freely sliding grains. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), Nr. 11, S. 1535–1541
- [77] PICU, C. R. ; GUPTA, V.: Three-dimensional stress singularities at the tip of a grain triple junction line intersecting the free surface. In: *J. Mech. Phys. Solids* 45 (1997), Nr. 9, S. 1495–1520
- [78] POONSAWAT, P. ; WIJEYEWICKREMA, A. C. ; KARASUDHI, P.: Stress Singularity Analysis of a Crack Terminating at the Interface of an Anisotropic Layered Composite. In: *Journal of Applied Mechanics* 65 (1998), Nr. 4, S. 829–836
- [79] POONSAWAT, P. ; WIJEYEWICKREMA, A. C. ; KARASUDHI, P.: Singular stress fields of angle-ply and monoclinic bimaterial wedges. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 1, S. 91–113
- [80] SATOR, C.: *Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale*, TU Darmstadt, Dissertation, 2010

- [81] SCHUHMANN, T.: *Untersuchungen zu Spannungssingularitäten in isotropen Composites*. Fachgebiet Strukturmechanik, TU Darmstadt, Abschlussarbeit B.Sc., 2009
- [82] SHANG, F. ; KITAMURA, T.: On stress singularity at the interface edge between piezoelectric thin film and elastic substrate. In: *Microsyst. Technol.* 11 (2005), S. 1115–1120
- [83] SINCLAIR, G. B.: Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics* 66 (1999), Nr. 2, S. 556–560
- [84] SINCLAIR, G. B.: Stress singularities in classical elasticity—I: Removal, interpretation, and analysis. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 4, S. 251–297
- [85] SINCLAIR, G. B.: Stress singularities in classical elasticity—II: Asymptotic identification. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 5, S. 385–439
- [86] SOMARATNA, N. ; TING, T. C. T.: Three-dimensional stress singularities in anisotropic materials and composites. In: *International Journal of Engineering Science* 24 (1986), Nr. 7, S. 1115–1134
- [87] SONG, Ch.: A super-element for crack analysis in the time domain. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), Nr. 8, S. 1332–1357
- [88] SONG, Ch. ; VRCELJ, Z.: Evaluation of dynamic stress intensity factors and T-stress using the scaled boundary finite-element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 8, S. 1960–1980
- [89] SONG, Ch. ; WOLF, J. P.: Consistent Infinitesimal Finite Element Cell Method for Incompressible Unbounded Medium. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 13 (1997), Nr. 1, S. 21–32
- [90] SONG, Ch. ; WOLF, J. P.: Body loads in scaled boundary finite-element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 180 (1999), S. 117–135
- [91] SONG, Ch. ; WOLF, J. P.: The scaled boundary finite-element method - alias consistent infinitesimal finite-element cell method - for diffusion. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), Nr. 10, S. 1403–1431
- [92] SONG, Ch. ; WOLF, J. P.: Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method. In: *Computers & Structures* 80 (2002), S. 183–197

- [93] SOSA, H.: Plane problems in piezoelectric media with defects. In: *International Journal of Solids and Structures* 28, Issue 4, 1991, Pages 491–505 (1991), Nr. 4, S. 491–505
- [94] SOSA, H. A. ; PAK, Y. E.: Three-dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric material. In: *International Journal of Solids and Structures* 26 (1990), Nr. 1, S. 1–15
- [95] SRINIVASAN, A. V. ; MCFARLAND, D. M.: *Smart Structures*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001
- [96] SUO, Z. ; KUO, C.-M. ; BARNETT, D. M. ; WILLIS, J. R.: Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40 (1992), Nr. 4, S. 739–765
- [97] THEOCARIS, P. S.: The order of singularity at a multi-wedge corner of a composite plate. In: *International Journal of Engineering Science* 12 (1974), S. 107–120
- [98] TING, T. C. T.: Stress singularities at the tip of interfaces in polycrystals. In: *Damage and Failure of Interface*. Rotterdam : Balkema, 1997, S. 75–82
- [99] WENG, S.-M. ; CHUE, C.-H.: The stress singularities at the apex of composite piezoelectric junctions. In: *Archive of Applied Mechanics* 73 (2004), Nr. 9–10, S. 638–649
- [100] WIEGHARDT, K.: Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 55 (1907), S. 60–103
- [101] WIGGER, H. M. ; BECKER, W.: Characterization of inplane loaded anisotropic interface corners with the boundary finite element method. In: *Computational Mechanics* 37 (2006), S. 153–162
- [102] WILLIAMS, M. L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Journal of Applied Mechanics* 19 (1952), S. 526–528
- [103] WILLIAMS, M. L.: The stresses around a fault or crack in dissimilar media. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 49 (1959), Nr. 2, S. 199–204
- [104] WOLF, J. P.: Response of unbounded soil in scaled boundary finite-element method. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31 (2002), S. 15–32

- [105] WOLF, J. P.: *The Scaled Boundary Finite Element Method*. Wiley, Chichester, 2003
- [106] WOLF, J. P. ; SONG, Ch.: Consistent infinitesimal finite-element cell method: in-plane motion. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 123 (1995), S. 355–370
- [107] WOLF, J. P. ; SONG, Ch.: Unit-impulse response matrix of unbounded medium by infinitesimal finite-element cell method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 122 (1995), S. 251–272
- [108] WOLF, J. P. ; SONG, Ch.: *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*. Wiley, Chichester, 1996
- [109] WOLF, J. P. ; SONG, Ch.: Unit-impulse response of unbounded medium by scaled boundary finite-element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 159 (1998), S. 355–367
- [110] WOLF, J. P. ; SONG, Ch.: The scaled boundary boundary finite element method – a primer: solution procedures. In: *Computers & Structures* 78 (2000), S. 211–225
- [111] WOLF, J. P. ; SONG, Ch.: The scaled boundary finite element method – a primer: derivations. In: *Computers & Structures* 78 (2000), S. 191–210
- [112] XU, X.-L. ; RAJAPAKSE, R. K. N. D.: On singularities in piezoelectric composite wedges and junctions. In: *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), S. 3253–3275
- [113] ZAK, A. R. ; WILLIAMS, M. L.: Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface. In: *Journal of Applied Mechanics* 30, Issue 1, 142 (2 pages) (1953), Nr. 1, S. 142–143

Bisher sind in dieser Reihe erschienen

Band 1

Zur mikrorissinduzierten Schädigung spröder Materialien

B. Lauterbach, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-01-4

Band 2

3D-Simulation der Mikrostrukturentwicklung in Zwei-Phasen-Materialien

R. Müller, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-02-2

Band 3

Zur numerischen Simulation von Morphologieänderungen in mikroheterogenen Materialien

S. Kolling, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-03-0

Band 4

Theoretische und numerische Untersuchung von Versagensmechanismen in Metall-Keramik-Verbundwerkstoffen

T. Emmel, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-04-9

Band 5

On microcrack dominated problems in dynamics and statics of brittle fracture: a numerical study by boundary element techniques

S. Rafiee, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-05-7

Band 6

Kontinuumsmechanik anisotroper Festkörper und Fluide

H. Ehrentraut, Habilitationsschrift 2002, ISBN 3-935868-06-5

Band 7

Plane unsteady inviscid incompressible hydrodynamics of a thin elastic profile

N. Blinkova, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-07-3

Band 8

Anmerkungen zur Simulation von entfestigendem Materialverhalten

H. Baaser, Habilitationsschrift 2004, ISBN 3-935868-08-1

Band 9

Orts- und zeitadaptive DAE-Methoden zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens innerhalb der FEM

S. Eckert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-09-X

Band 10

Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: Parameter Sensitivity Tests and Temperature-Dependent Rate Factor

A. Humbert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-10-3

Band 11

A Thermo-mechanical Continuum Theory with Internal Length of Cohesionless Granular Materials

Chung Fang, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-11-1

Band 12

Modeling Dry Granular Avalanches past Different Obstructions: Numerical Simulation and Laboratory Analyses

Chiou Min-Ching, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-12-X

Band 13

Configurational forces in defect mechanics and in computational methods

R. Müller, Habilitationsschrift 2005, ISBN 3-935868-13-8

Band 14

Hyperelastic dynamics in physical and material space

S. Kolling, Habilitationsschrift 2007, ISBN 978-3-935868-14-3

Band 15

Phenomenological modeling of ferroelectric material behavior

V. Mehling, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-15-0

Band 16

Ein mischungsbasiertes Materialmodell zum Knochenumbau

R.-R. Kühn, Dissertation 2006, ISBN 978-3-935868-16-7

Band 17

Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeffekte in ebenen Laminaten

J. Artel, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-17-4

Band 18

Spannungskonzentrations-Effekte an Verstärkungspflaster-Ecken

H. Wigger, Dissertation 2008, ISBN 978-3-935868-18-1

Band 19

Rotationseffekte in der Kristallplastizität

C. Bröse, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-19-8

Band 20

Finite-Element-Modelle zur Simulation von Delaminationen dünner Filme auf Substraten

V. D. Pham, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-20-4

Band 21

Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale

C. Sator, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-21-1

Band 22

Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse

J. Hebel, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-22-8

Band 23

Some Contributions to the Homogenization of Macroscopically Isotropic Composites

V. Salit, Dissertation 2011, ISBN 978-3-935868-23-5

Band 24

Asymptotic Analysis of the Load Transfer on Double-Lap Bolted Joints

J. Kratochvíl, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-24-2

